سلسلة الامتياز

في

الرياضيات

للصف الثالث الإعدادي
الفصل الدراسي الثاني

إعداد

الأستاذ/وليد محمد عكاشة

ت : ٠١٠٠٢٠٩٧٨٦٦

الوحدة الأولى

الدرس الأول

حل معادلتين فى متغيرين من الدرجة الأولى جبرياً

← لحل معادلتين فى متغيرين من الدرجة الأولى نستخدم طريقة الحذف

مثال ١ أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية جبرياً :-

١ س + ص = ٧ ، س - ص = ٣

الحل

س + ص = ٧ ← ①

س - ص = ٣ ← ②

بالجمع

٢ س = ١٠ ، س = ١٠ / ٢

بالتعويض فى ١ : س = ٥

٥ + ص = ٧ - ٥

ص = ٢

∴ م.ح = {(٥ ، ٢)}

٢ ٢س + ص = ٠ ، س + ص = ١

الحل

٢س + ص = ٠ ← ①

س + ص = ١ ← ②

بالطرح

س = -١ بالتعويض فى ②

-١ + ص = ١

ص = ١ + ١ ⇐ ص = ٢

∴ م.ح = {(-١ ، ٢)}

٣ س - ص = ٤ ، س + ٢ص = ١٣

الحل (×٢)

س - ص = ٤ ← ①

س + ٢ص = ١٣ ← ②

بضرب المعادلة الأولى (×٢)

٢س - ٢ص = ٨

س + ٢ص = ١٣

بالجمع

٣س = ٢١ ⇐ س = ٢١ / ٣

س = ٧ بالتعويض فى ②

٧ + ٢ص = ١٣

٢ص = ١٣ - ٧

٢ص / ٢ = ٦ / ٢ ، ص = ٣

∴ م.ح = {(٧ ، ٣)}

٤ ٢س + ٥ص = -٥ ، ٥س - ٢ص = ٣١

الحل

٢س + ٥ص = -٥ ← ① × ②

٥س - ٢ص = ٣١ ← ② × ⑤

بضرب المعادلة الأولى × ② والثانية × ⑤

٤س + ١٠ص = -١٠

٢٥س - ١٠ص = ١٥٥

بالجمع

٢٩س / ٢٩ = ١٤٥ / ٢٩

س = ٥ بالتعويض فى ①

٢ × ٥ + ٥ص = -٥ - ١٠

٥ص = -١٥ ⇐ ص = -١٥ / ٥

∴ ص = -٣

∴ م.ح = {(٥ ، -٣)}

٥ ٢س + ص = ١٠ ، ص = ٣س

الحل

٢س + ص = ١٠ ← ①

٣س − ص = ٠ ← ②

بالجمع

٥س = ١٠ ⇐ س = ١٠/٥

$\boxed{س = ٢}$ بالتعويض في ①

٢×٢ + ص = ١٠

ص = ١٠ − ٤ = ٦

$\boxed{ص = ٦}$

∴ م.ح = {(٢ ، ٦)}

٦ ٢س = ٩ − ٥ص ، ٣س − ص − ٥ = ٠

الحل

٢س + ٥ص = ٩ ← ①

٣س − ص = ٥ ← ②

ترتيب المعادلتين أولاً

بضرب المعادلة ② × ⑤

٢س + ~~٥ص~~ = ٩

١٥س − ~~٥ص~~ = ٢٥

بالجمع

١٧س = ٣٤ ⇐ س = ٣٤/١٧

∴ $\boxed{س = ٢}$ بالتعويض في ①

٢×٢ + ٥ص = ٩

٥ص = ٩ − ٤

٥ص = ٥ ⇐ ص = ٥/٥

$\boxed{ص = ١}$

∴ م.ح = {(٢ ، ١)}

٧ س = ٥ − ص ، ٢س + ٢ص = ٣

الحل

س + ص = ٥ ← ①

٢س + ٢ص = ٣ ← ②

بضرب المعادلة ① × (−٢)

~~−٢س~~ − ~~٢ص~~ = −١٠

~~٢س~~ + ~~٢ص~~ = ٣

بالجمع

صفر ≠ −٧

∵ س ، ص تم حذفهم وتبقى الأعداد

∴ المستقيمان متوازيان

∴ م.ح = ∅

٨ ٢س = ٨ − ٤ص ، س + ٢ص = ٤

الحل

٢س + ٤ص = ٨ ← ①

س + ٢ص = ٤ ← ②

بضرب المعادلة ② × (−٢)

~~٢س~~ + ~~٤ص~~ = ~~٨~~

~~−٢س~~ − ~~٤ص~~ = ~~−٨~~

بالجمع

كله إتحذف ∴ المستقيمان منطبقان

∴ م.ح = عدد لانهائى من الحلول

وأحد هذه الحلول هو

نشتغل على أى معادلة فيهم وليكن الثانية

س + ٢ص = ٤

بوضع $\boxed{س = ٠}$

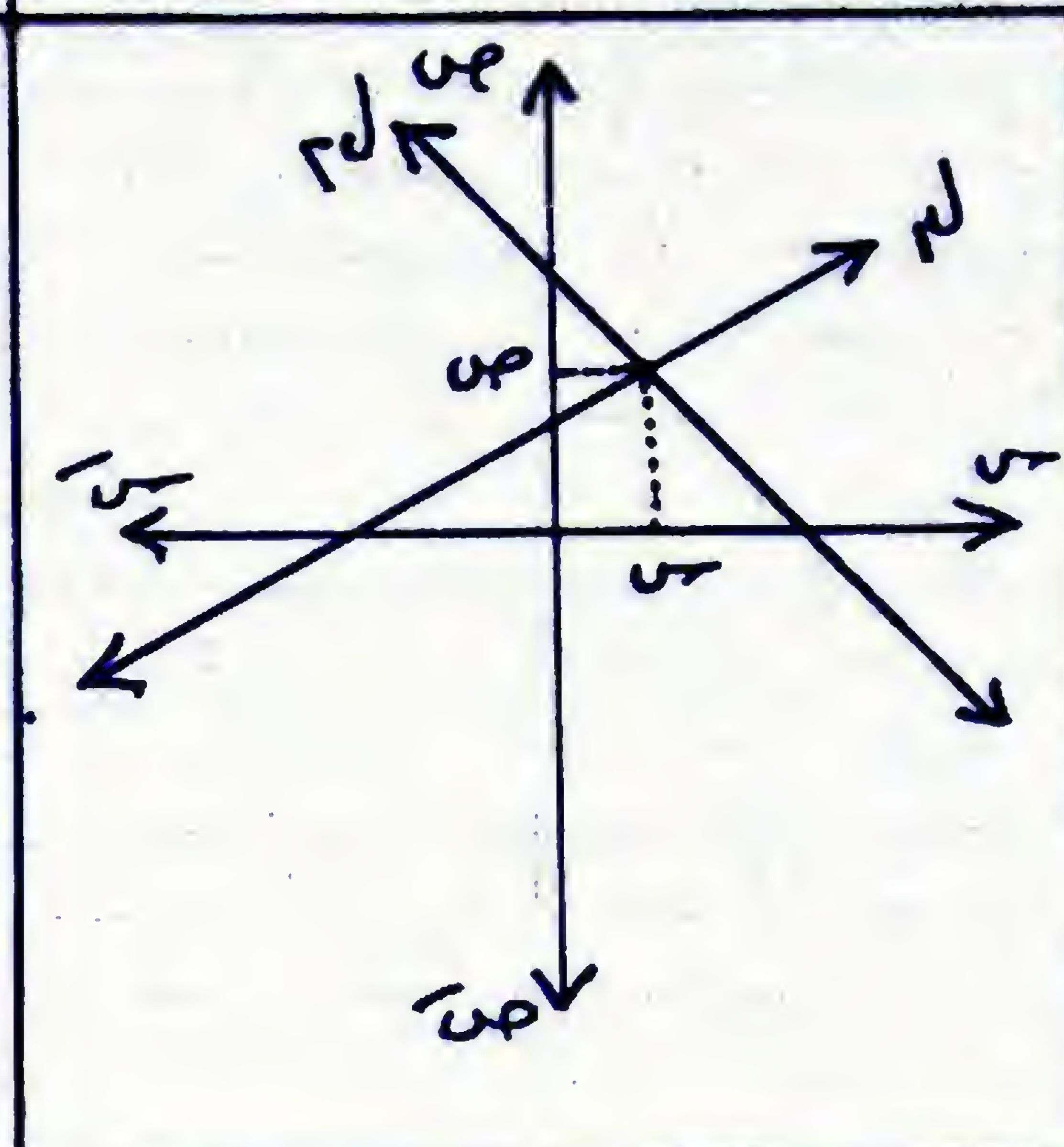
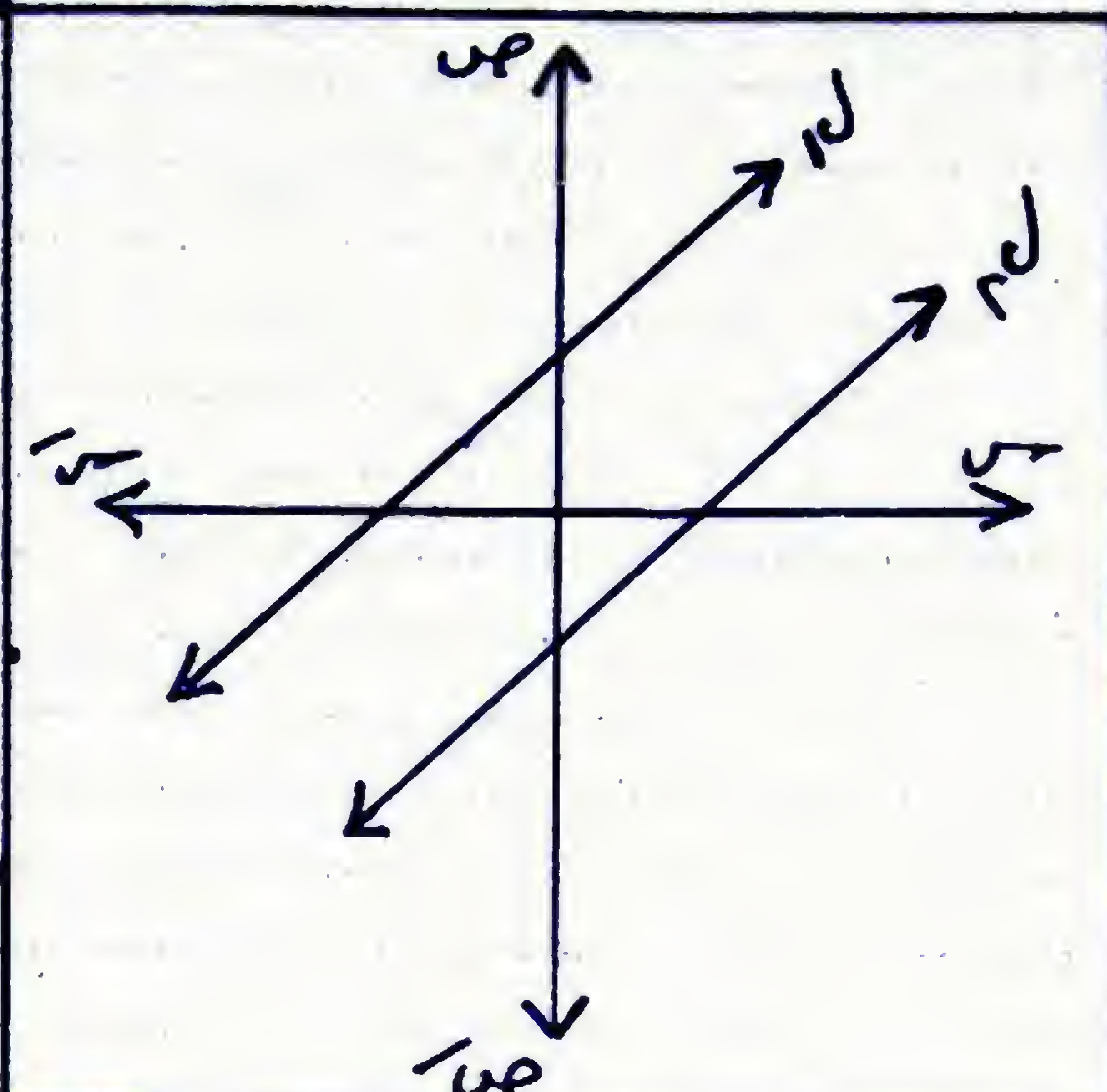
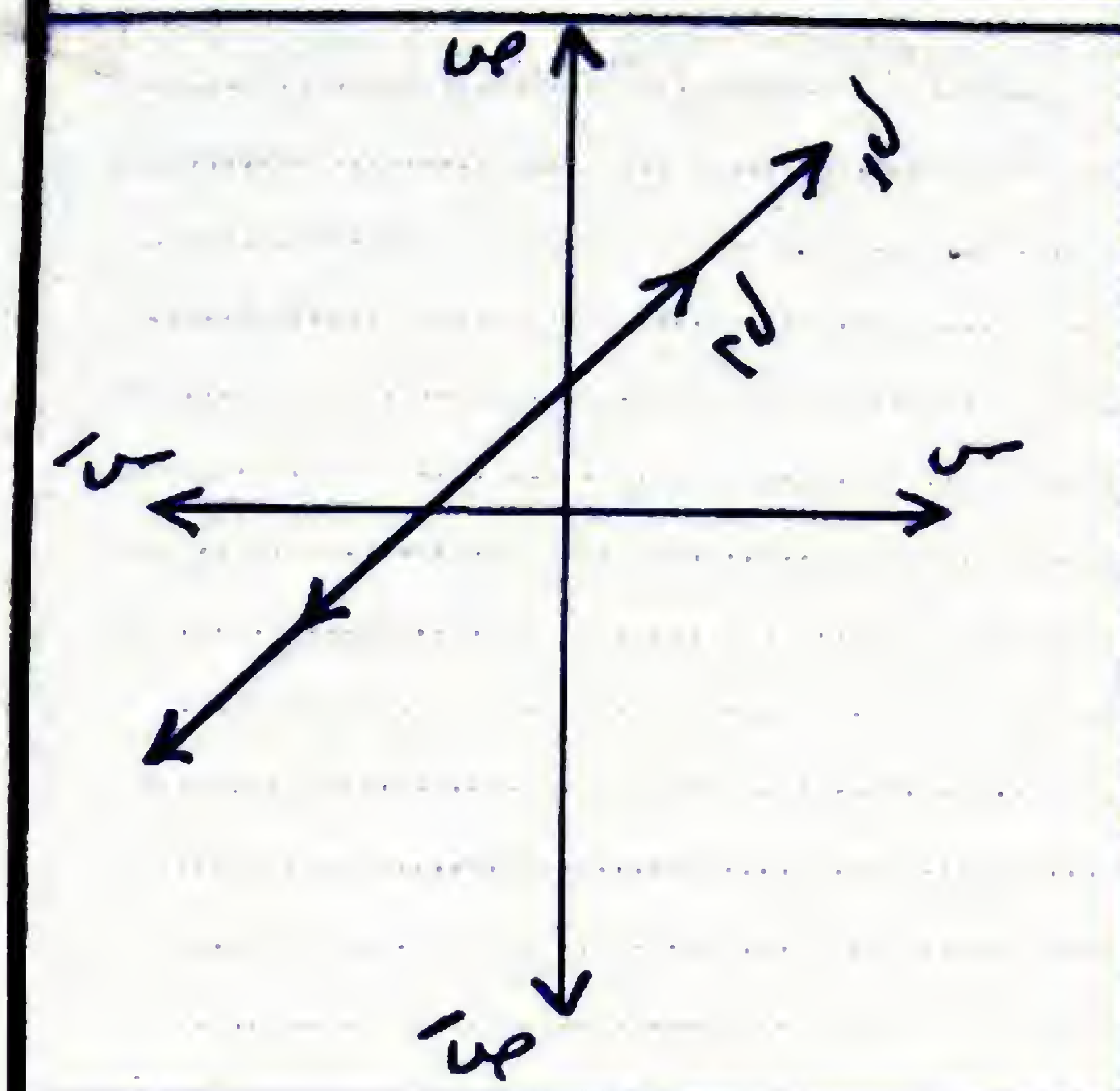
∴ ٠ + ٢ص = ٤ ⇐ ٢ص = ٤

ص = ٤/٢ ← $\boxed{ص = ٢}$

∴ أحد الحلول هى {(٠ ، ٢)}

⇐ لاحظ أن معادلة واحدة من الدرجة الأولى فى متغيرين لها عدد لانهائى من الحلول لذلك فإن المستقيمان المنطبقان يعتبروا معادلة واحدة.

الدرس الثاني [حل معادلتي الدرجة الأولى في متغيرين بيانياً]

متقاطعان	متوازيان	منطبقان
		
م.ح = {(س ، ص)} عدد الحلول = حل وحيد	م.ح = ϕ عدد الحلول = صفر	م.ح = عدد لانهائي من الحلول عدد الحلول هو عدد لانهائي

[بحث نوع الخطين دون رسمهما]

إذا كان ل١ = أ س + ب ص = جـ ، ل٢ = هـ س + و ص = د

إذا كان $\frac{أ}{هـ} = \frac{ب}{و} = \frac{جـ}{د}$ كان المستقيمان منطبقان ويكون عدد الحلول عدد لانهائي وأحد هذه الحلول هو {(س ، ص)}	إذا كان $\frac{أ}{هـ} = \frac{ب}{و} \neq \frac{جـ}{د}$ كان المستقيمان متوازيان م.ح = ϕ عدد الحلول = صفر	إذا كان $\frac{أ}{هـ} \neq \frac{ب}{و}$ كان المستقيمان متقاطعان م.ح = {(س ، ص)} حل وحيد (عدد الحلول)

مثال ① بين نوع الخطين

٢س + ٣ص = ١ ، ٤س + ٦ص = ٢

$\frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$

$\because \frac{أ}{هـ} = \frac{ب}{و} = \frac{جـ}{د}$

$\therefore$ المستقيمان منطبقان

مثال ② إذا كان ٥س + ل ص = ٣ ،

١٠س + ٦ص = ٥ متوازيان أوجد قيمة ل

$\because$ المستقيمان متوازيان $\therefore \frac{٥}{١٠} = \frac{ل}{٦}$

ل = $\frac{٥ \times ٦}{١٠} = \frac{٣٠}{١٠} = ٣$

$\therefore \boxed{ل = ٣}$

٣ أوجد مجموعة حل المعادلتين بيانياً

① ص = ٣س − ١ ، س − ص + ١ = ٠

الحل

ص = ٣س − ١

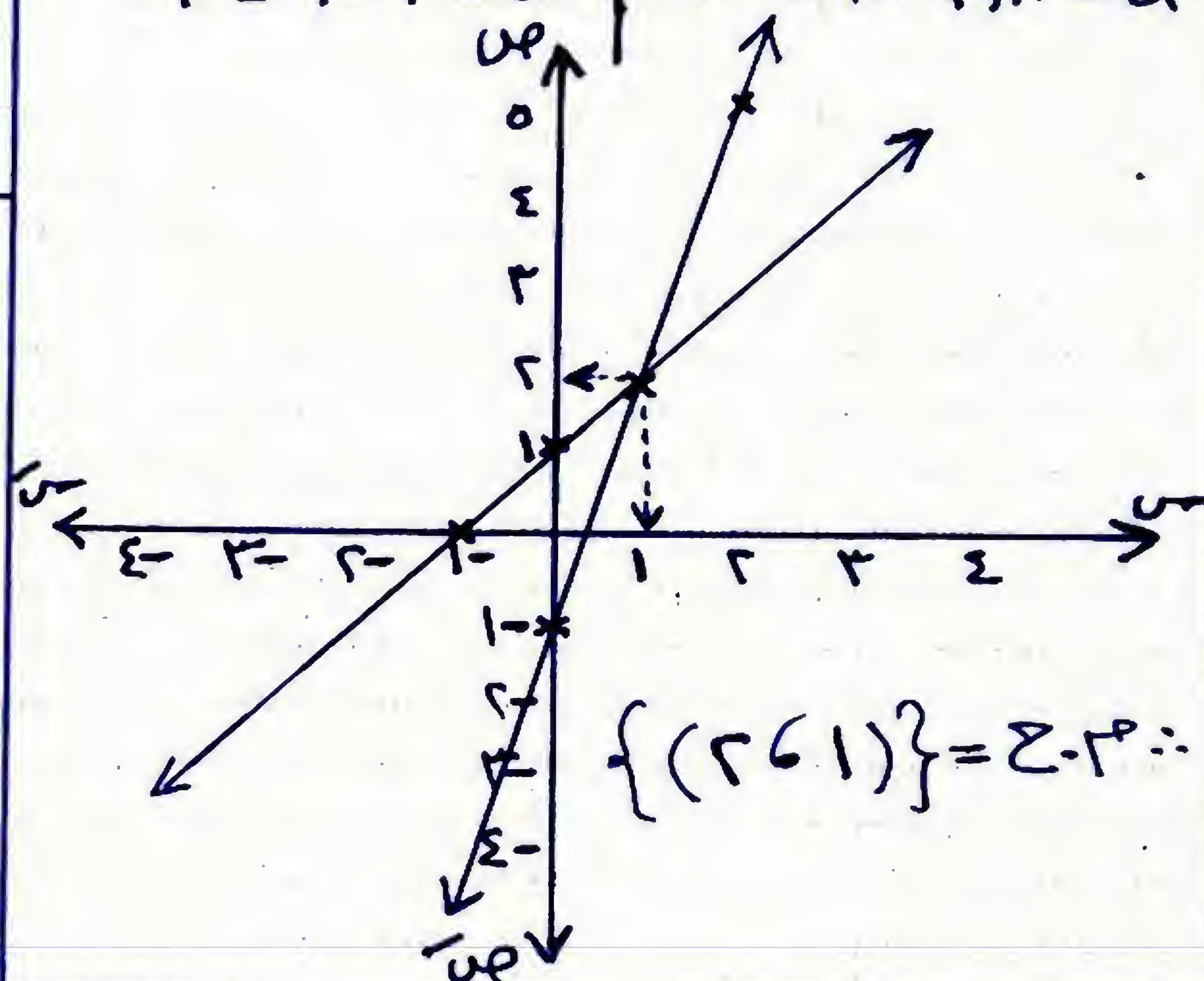
س	٠	١	٢
ص	−١	٢	٥

ص = ٣ × ٠ − ١ = −١
ص = ٣ × ١ − ١ = ٢
ص = ٣ × ٢ − ١ = ٥

س = ص − ١

س	−١	٠	١
ص	٠	١	٢

س = ٠ − ١ = −١
س = ١ − ١ = ٠
س = ٢ − ١ = ١



∴ م.ح = {(١ ، ٢)}

② ٣س + ص = ٣ ، ٢ص + ٦س = ١٢

الحل

ص = ٣ − ٣س

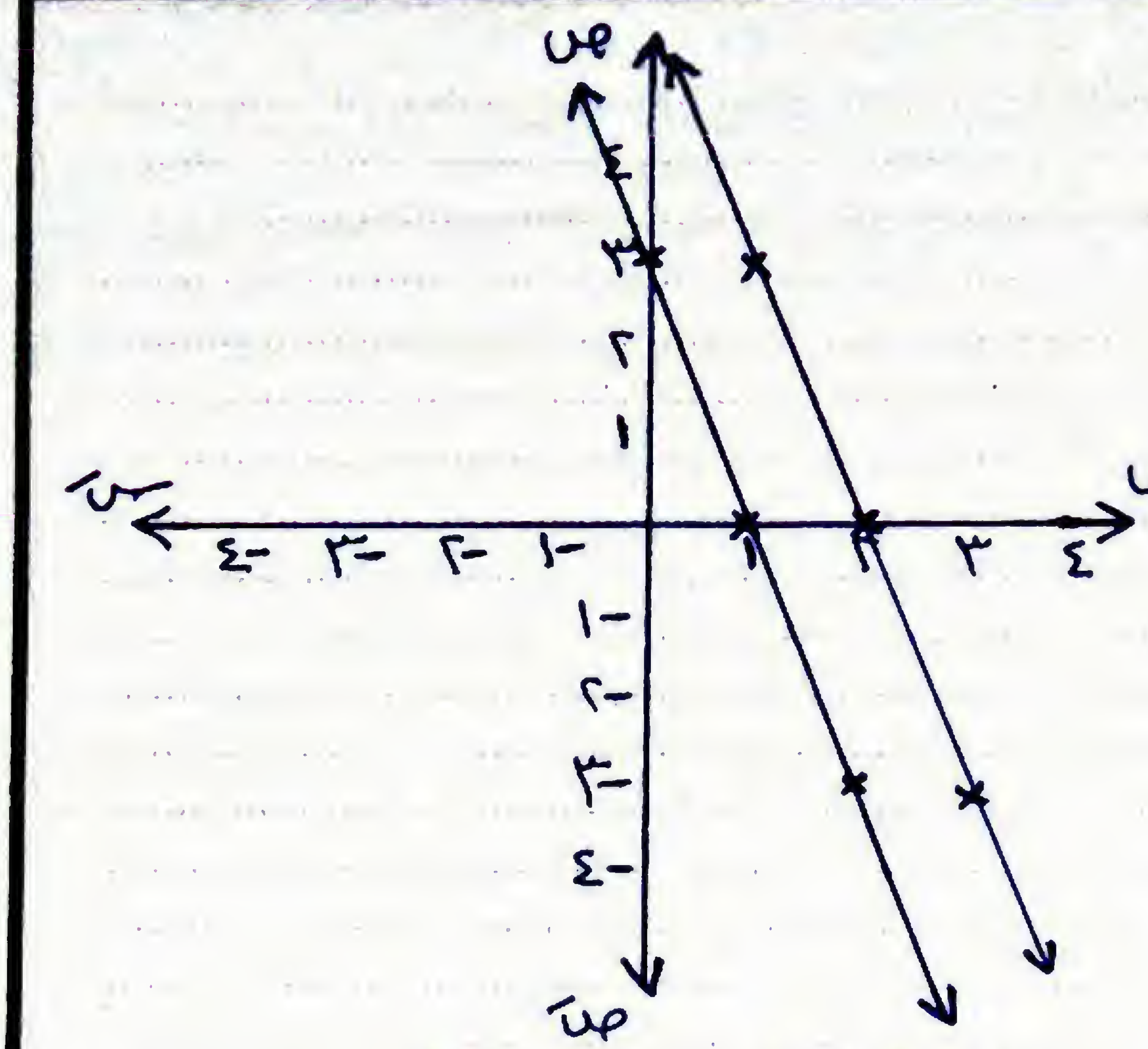
س	٠	١	٢
ص	٣	٠	−٣

ص = ٣ − ٣ × ٠ = ٣
ص = ٣ − ٣ × ١ = ٠
ص = ٣ − ٣ × ٢ = −٣

٢ص = ١٢ − ٦س
بالقسمة على ٢
ص = ٦ − ٣س

س	١	٢	٣
ص	٣	٠	−٣

ص = ٦ − ٣ × ١ = ٣
ص = ٦ − ٣ × ٢ = ٠
ص = ٦ − ٣ × ٣ = −٣



∴ المستقيمان متوازيان

∴ م.ح = ∅

③ ٣س + ٢ص = ٦ ، ص = ٣ − $\frac{٣}{٢}$ س

$\frac{٣س}{٣} = \frac{٦ - ٢ص}{٣}$

س = $\frac{٦ - ٢ص}{٣}$

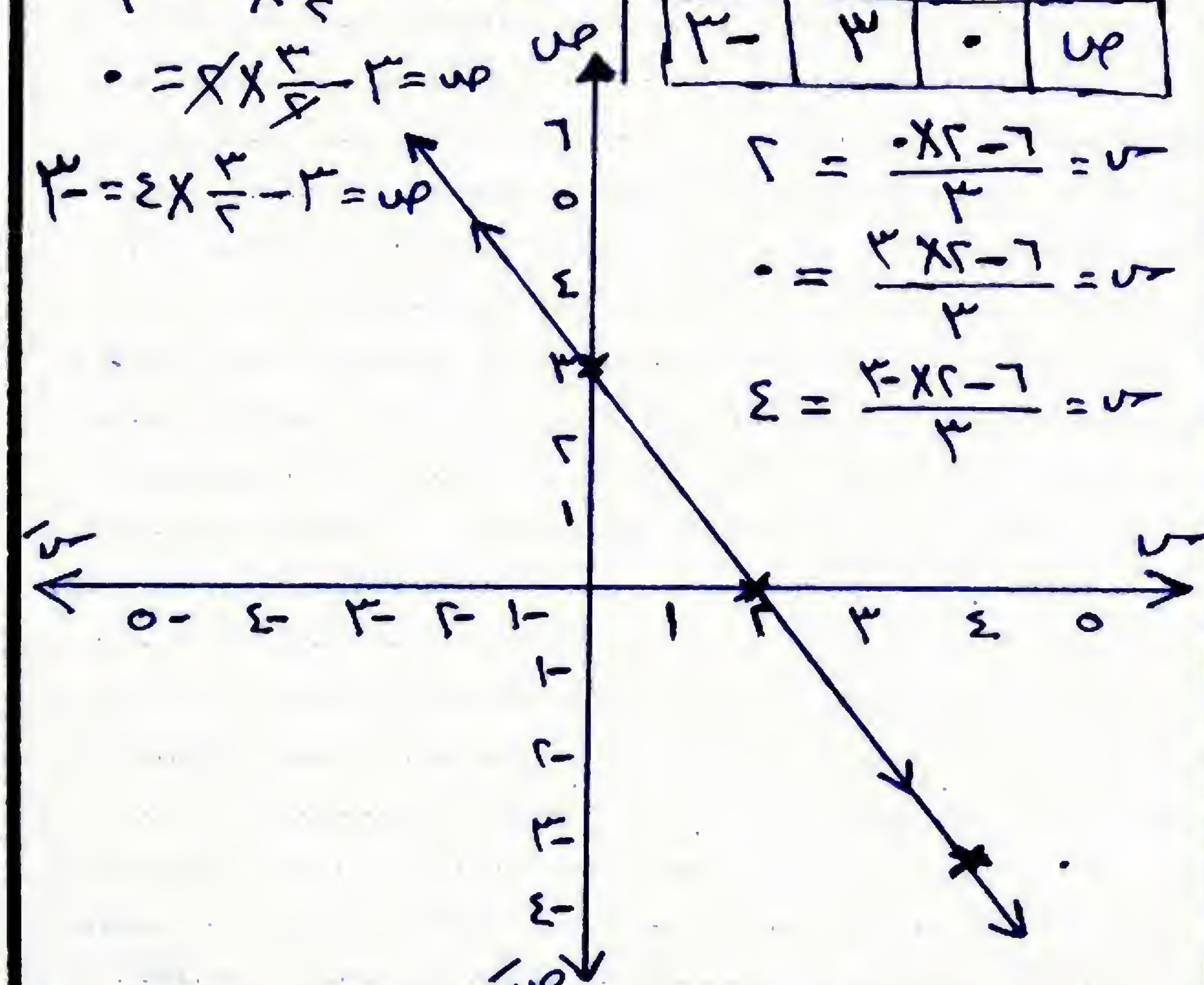
س	٢	٠	٤
ص	٠	٣	−٣

س = $\frac{٦ - ٢ \times ٠}{٣}$ = ٢
س = $\frac{٦ - ٢ \times ٣}{٣}$ = ٠
س = $\frac{٦ - ٢ \times -٣}{٣}$ = ٤

ص = ٣ − $\frac{٣}{٢}$ س

س	٠	٢	٤
ص	٣	٠	−٣

ص = ٣ − $\frac{٣}{٢}$ × ٠ = ٣
ص = ٣ − $\frac{٣}{\cancel{٢}}$ × $\cancel{٢}$ = ٠
ص = ٣ − $\frac{٣}{٢}$ × ٤ = −٣



∴ المستقيمان منطبقان

∴ م.ح عدد لا نهائي من الحلول

أحد هذه الحلول هي = {(٢ ، ٠)}

الدرس الثالث

تطبيقات على حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين

عددان ← س ، ص

مجموعهم ← س + ص

الفرق بينهم ← س − ص

محيط المستطيل ← س + ص = ½ المحيط

يزيد ← (−)

أضيف ← (+)

ضعف الأول ← ٢س

ثلاثة أمثاله ← ٣س وهكذا

زاويتان متتامتان ← س + ص = ٩٠°

زاويتان متكاملتان ← س + ص = ١٨٠°

(1) عددان نسبيان مجموعهم ٦٣ والفرق بينهم ١٢ أوجد العددين.

الحل نفرض أن العددان هما س ، ص

س + ص = ٦٣ ← (1)

س − ص = ١٢ ← (2)

بالجمع

$\cancel{٢}$س = $\frac{٧٥}{٢}$ $\boxed{\text{س} = ٣٧٫٥}$

بالتعويض فى (1)

٣٧٫٥ + ص = ٦٣

ص = ٦٣ − ٣٧٫٥

ص = $\frac{٥١}{٢}$ = ٢٥٫٥

∴ العددان هما $\frac{٧٥}{٢}$ ، $\frac{٥١}{٢}$

(2) عددان إذا أضيف ثلاثة أمثال العدد الأول إلى ضعف العدد الثانى كان الناتج ١٩ وإذا أضيف العدد الأول إلى ثلاثة أمثال العدد الثانى كان الناتج ١٦ فما العددان

الحل نفرض أن العدد الأول (س) ، الثانى (ص)

٣س + ٢ص = ١٩ ، س + ٣ص = ١٦

بضرب المعادلة (2) × (−٣)

$\cancel{٣}$س + ٢ص = ١٩

$\cancel{−٣}$س − ٩ص = −٤٨

$\frac{\cancel{−٧}\text{ص}}{\cancel{−٧}} = \frac{−٢٩}{−٧}$ $\boxed{\text{ص} = \frac{٢٩}{٧}}$

بالتعويض فى (2)

س + ٣ × $\frac{٢٩}{٧}$ = ١٦

س = ١٦ − $\frac{٨٧}{٧}$ $\boxed{\text{س} = \frac{٢٥}{٧}}$

∴ العددان هما $\frac{٢٩}{٧}$ ، $\frac{٢٥}{٧}$

(3) مستطيل طوله يزيد عن ضعف عرضه بمقدار ١ ومحيطه ٢٠ سم أوجد كلاً من بعديه ومساحته.

الحل نفرض أن الطول س سم ، العرض ص سم

س − ٢ص = ١ ← (1)

س + ص = ١٠ ← (2) (×٢)

س − $\cancel{٢\text{ص}}$ = ١

٢س + $\cancel{٢\text{ص}}$ = ٢٠ بالجمع

$\frac{\cancel{٣}\text{س}}{\cancel{٣}} = \frac{٢١}{٣}$ $\boxed{\text{س} = ٧}$

بالتعويض فى (2) ٧ + ص = ١٠

ص = ١٠ − ٧ $\boxed{\text{ص} = ٣}$

∴ الطول = ٧ سم ، العرض = ٣ سم

∴ مساحة المستطيل = الطول × العرض

= ٧ × ٣ = ٢١ سم²

٤ زاويتان متكاملتان ضعف قياس أكبرهما يساوي سبعة أمثال قياس الصغرى أوجد قياس كل زاوية .

نفرض أن قياس الصغرى س° ، الكبرى ص°

س + ص = ١٨٠ ، ٢ص = ٧س

س + ص = ١٨٠ ← ① × ②

٧س - ٢ص = ٠ ← ②

بضرب المعادلة ① × ②

٢س + ~~٢ص~~ = ٣٦٠°

٧س - ~~٢ص~~ = ٠

بالجمع

٩س = ٣٦٠° ⇐ س = ٣٦٠ / ٩

$\boxed{\text{س} = ٤٠°}$ بالتعويض في ①

٤٠ + ص = ١٨٠

ص = ١٨٠ - ٤٠

$\boxed{\text{ص} = ١٤٠°}$

∴ قياس الزاوية الصغرى = ٤٠° والكبرى ١٤٠°

٥ زاويتان حادتان في مثلث قائم الزاوية الفرق بين قياسيهما ٥٠° أوجد قياس كل منهما

الحل

نفرض أن الزاويتان هما س ، ص

س + ~~ص~~ = ٩٠ ← ①

س - ~~ص~~ = ٥٠ ← ②

بالجمع

٢س = ١٤٠ ⇐ س = ١٤٠ / ٢

$\boxed{\text{س} = ٧٠°}$ بالتعويض في ①

٧٠ + ص = ٩٠ ⇐ ص = ٩٠° - ٧٠°

$\boxed{\text{ص} = ٢٠°}$

∴ الزاويتين هما ٧٠° ، ٢٠°

٦ عدد مكون من رقمين ورقم آحاده ضعف رقم عشراته ، وإذا عكس وضع الرقمين كان العدد الناتج يزيد عن العدد الأصلي بمقدار ٣٦ أوجد العدد الأصلي .

الحل نفرض أن رقم الآحاد هو س

رقم العشرات هو ص

س = ٢ص ← ①

العدد الأصلي (س + ١٠ص)

وإذا عكس وضع الرقمين يكون الناتج (ص + ١٠س)

وإذا كان الناتج يزيد عن الأصلي بمقدار ٣٦

(ص + ١٠س) - (س + ١٠ص) = ٣٦

٩س - ٩ص = ٣٦ بالقسمة على ٩

س - ص = ٤ ← ②

بضرب المعادلة ② × -٢

س - ~~٢ص~~ = ٠

-٢س + ~~٢ص~~ = -٨

بالجمع

-س = -٨ $\boxed{\text{س} = ٨}$

بالتعويض في ①

٢ص = ٨ ⇐ ص = ٨ / ٢

∴ $\boxed{\text{ص} = ٤}$

∴ العدد الأصلي هو $\boxed{٤٨}$

دعاء المذاكرة

اللهم إني أسألك فهم النبيين وحفظ المرسلين والملائكة المقربين ، اللهم أجعل ألسنتنا عامرة بذكرك وقلوبنا بخشيتك وأسرارنا بطاعتك إنك على ما تشاء قدير وحسبنا الله ونعم الوكيل

تمارين (١)

[١] أكمل ما يأتي

١) مجموعة حل المعادلتين س + ص = ٠ ، ص - ٥ = ٠ في ح × ح هي ......

٢) إذا كان المستقيمان س + ٣ص = ٤ ، س + أص = ٧ متوازيان فإن أ = ...

٣) المستقيمان الممثلان للمعادلتين س + ٣ = ٠ ، ص = ٥ يتقاطعان في النقطة ....

٤) نقطة تقاطع المستقيمين س + ٧ = ٠ ، ص - ١ = ٠ تقع في الربع ....

٥) مجموعة حل المعادلتين ٤س + ص = ٦ ، ٢ص = ١٢ - ٨س في ح × ح هي ......

٦) إذا كان للمعادلتين س + ٢ص = ١ ، س + أص = ٢ حل وحيد فإن أ لا يمكن أن تساوي ....

٧) مجموعة حل المعادلتين س + ٣ص = ٤ ، ٣ص = ١ - س في ح × ح هي ....

٨) المستقيمان ٣س + ٥ص = ٠ ، ٥س - ٢ص = ٠ يتقاطعان في ....

[٢] أوجد مجموعة حل أزواج المعادلات الآتية بيانياً :

١) س + ص = ٤ ، ٢س - ص = ٢

٢) س = ٣ ، ٣س - ٥ص = ١

٣) ٢س = ٧ - ص ، ٤س + ٢ص = ٣

٤) ٣ص = ٦ ، س + ٦ص = ١٢

٥) س - ٣ص = ٦ ، ٢س - ٦ص = ١٢

[٣] أوجد مجموعة حل أزواج المعادلات الآتية جبرياً :

١) ص = ٢س - ١ ، س + ٢ص = ٨

٢) س + ص = ١ ، ص = ٢س + ٤

٣) س + ٣ص = ١١ ، ص - ٣س + ١٣ = ٠

٤) ٣س + ٥ص = ١١ ، ٥س + ٣ص = ١٣

٥) س + ٧ص = ٢٢ ، ٤س + ٣ص = ١٣

٦) ص - ٢ = ٠ ، ٣س + ص = ٧

٧) ٥ص = ٢س + ١ ، س - ٢ص = ١

[٤] أوجد قيمة أ ، ب إذا كانت

أس + ب ص = ٥ ، ٣أس + ب ص = ١٧ علماً بأن (٣ ، -١) حل للمعادلتين

[٥] عددان مجموعهما ٣ والفرق بينهما -٧ أوجد العددين

[٦] مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٣ سم فإذا كان ضعف طوله ينقص عن أربعة أمثال عرضه بمقدار ٣ سم ، أوجد بعدي المستطيل ومساحته.

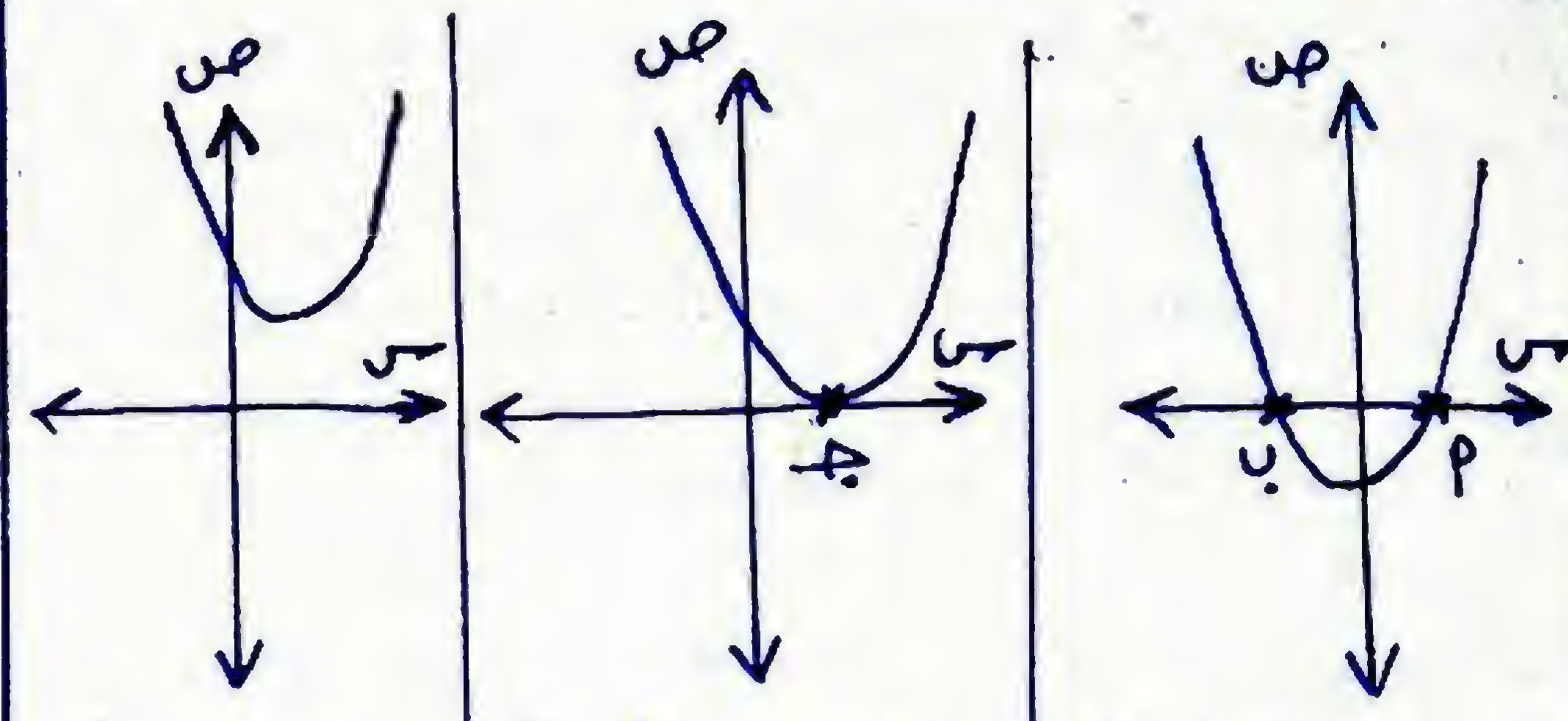
[٧] زاويتان متتامتان قياس إحداهما يزيد عن خمسة أمثال قياس الأخرى بمقدار ٣٠° أوجد قياس كل زاوية

[٨] منذ ٦ سنوات كان عمر رجل ستة أمثال عمر ابنه وبعد عشر سنوات يكون عمر الرجل ضعف عمر ابنه فما عمر كل منهما الآن

[٩] عدد مكون من رقمين مجموعهما ٥ وإذا تغير وضع الرقمين فإن العدد الناتج ينقص عن العدد الأصلي بمقدار ٩ فما هو العدد الأصلي.

الدرس الرابع :-

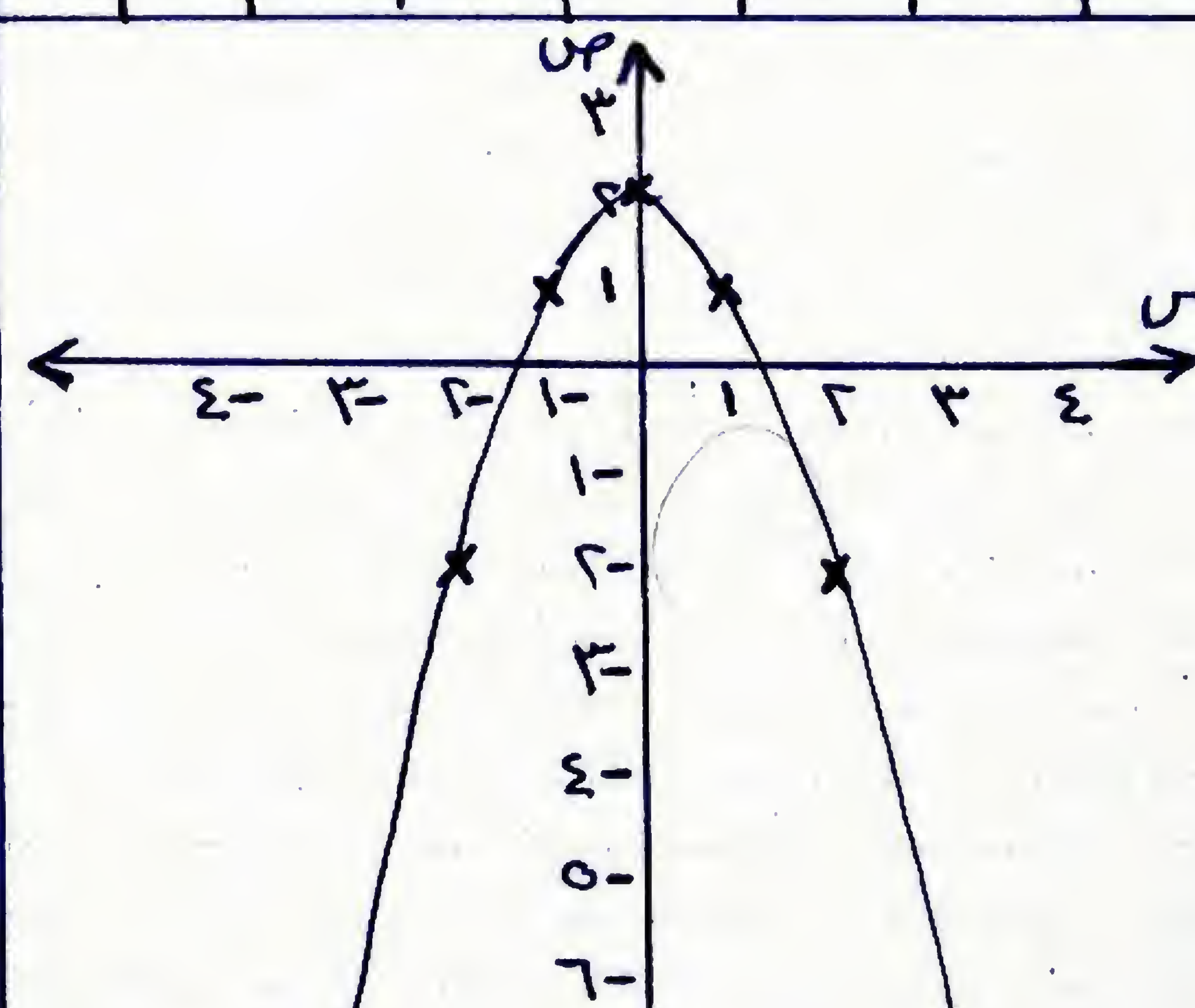
حل معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد جبرياً وبيانياً



م.ح = {أ ، ب}   م.ح = {جـ}   م.ح = ϕ

مثال ① مثل بيانياً د(س) = ٢ - س^٢ متخذاً س ∈ [-٣ ، ٣] ومن الرسم أوجد إحداثي رأس المنحنى ومعادلة محور التماثل والقيمة العظمى أو الصغرى ومجموعة حل المعادلة د(س) = صفر   الحل

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
ص	-٧	-٢	١	٢	١	-٢	-٧



رأس المنحنى = (٠ ، ٢)

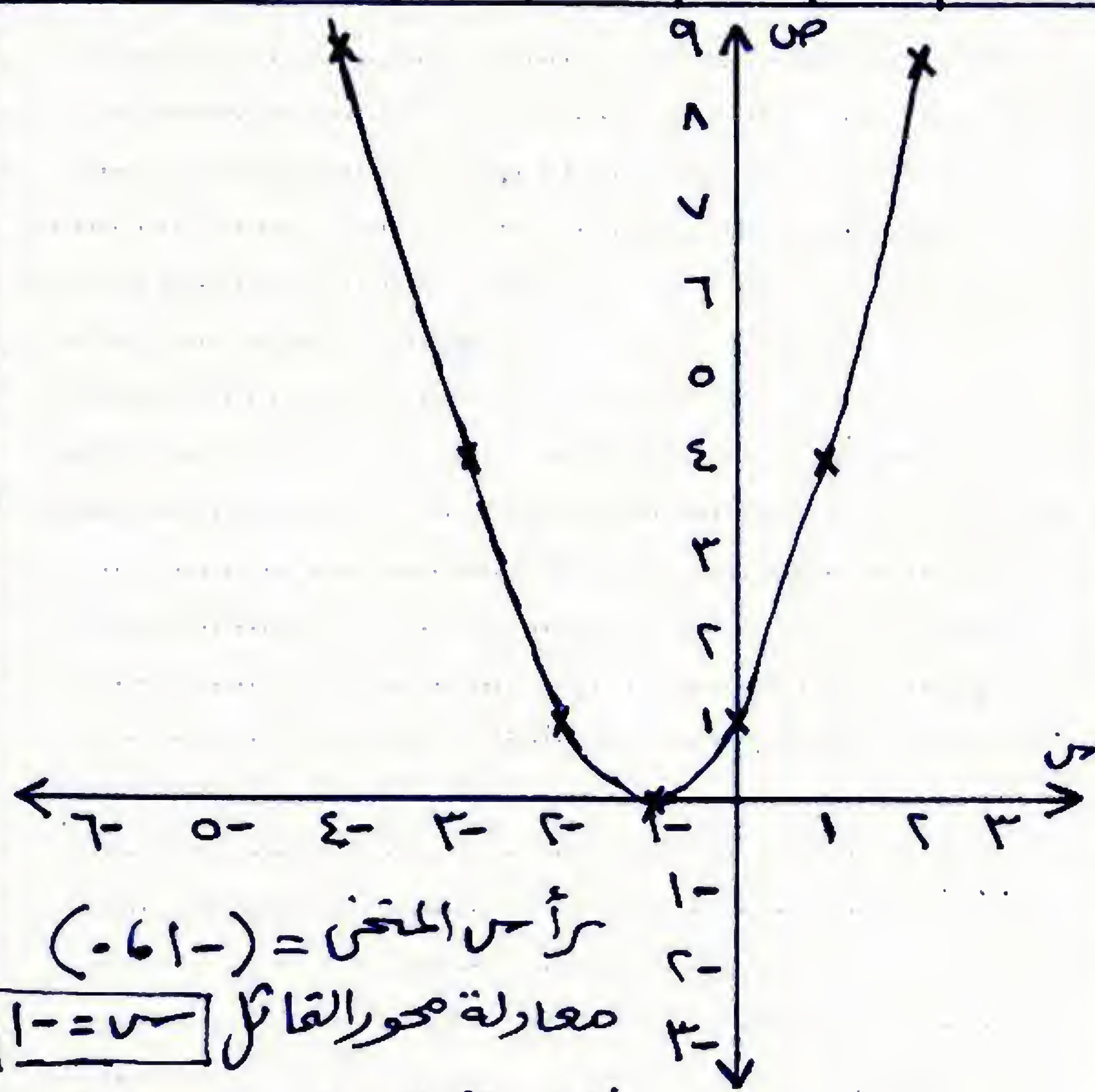
معادلة محور التماثل هي س = ٠

القيمة العظمى = ٢

م.ح = {-١٫٤ ، ١٫٤}

مثال ② د(س) = س^٢ + ٢س + ١ متخذاً س ∈ [-٤ ، ٢]   الحل

س	-٤	-٣	-٢	-١	٠	١	٢
ص	٩	٤	١	٠	١	٤	٩



رأس المنحنى = (-١ ، ٠)

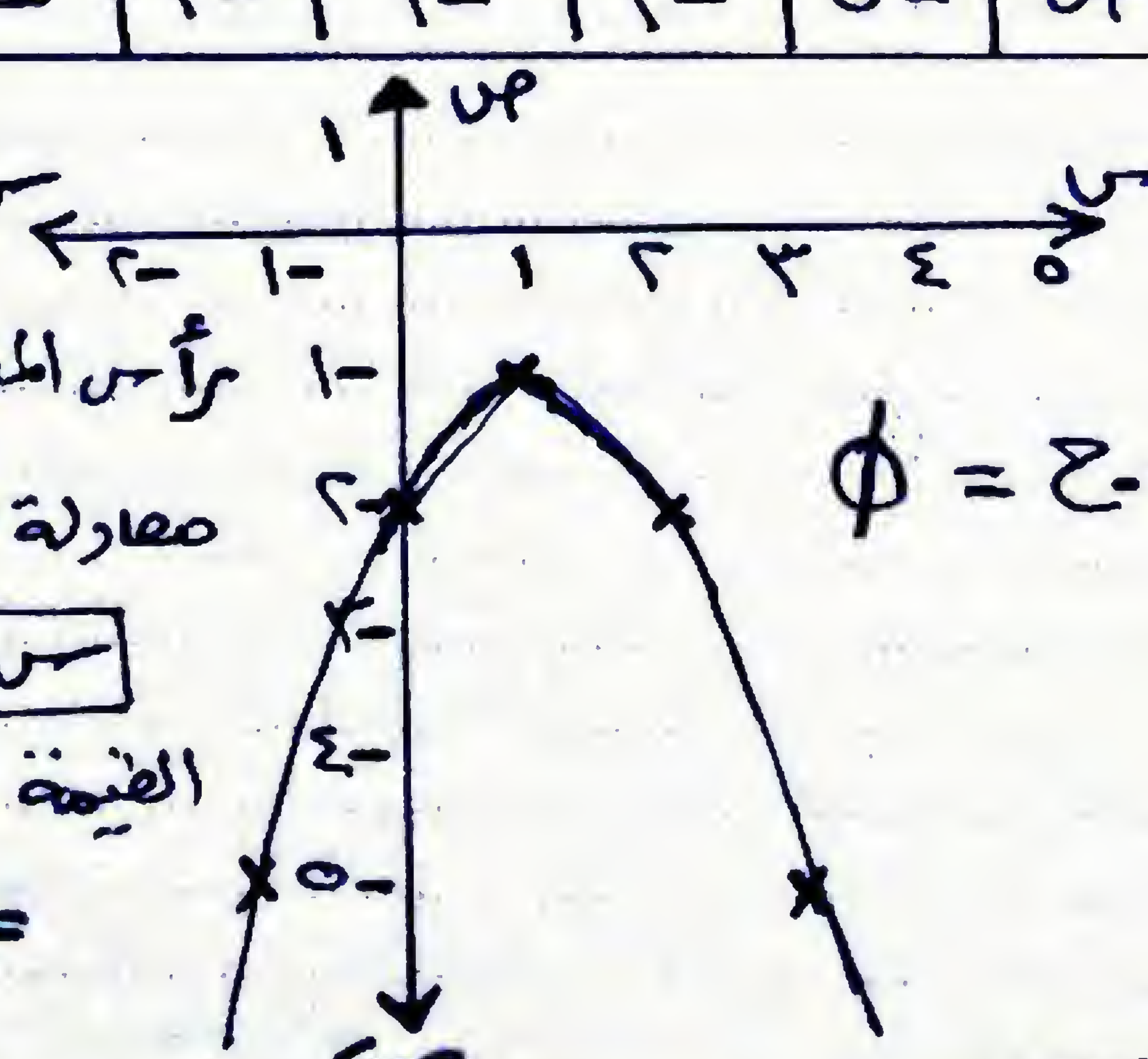
معادلة محور التماثل س = -١

القيمة الصغرى = صفر

م.ح = {-١}

مثال ③ د(س) = ٢س - ٢ - س^٢ حيث س ∈ [-١ ، ٣]   الحل

س	-١	٠	١	٢	٣
ص	-٥	-٢	-١	-٢	-٥



رأس المنحنى = (١ ، -١)

معادلة محور التماثل س = ١

القيمة العظمى = -١

م.ح = ϕ

الحل الجبرى

[التحليل - القانون العام]

مثال ① حل جبرياً $س^٢ + ٧س = ٨$

باستخدام التحليل $س^٢ + ٧س - ٨ = ٠$

$(س + ٨)(س - ١) = ٠$

$\boxed{س = -٨}$ ، $\boxed{س = ١}$

$\therefore م.ح = \{-٨ ، ١\}$

ملحوظة بعض المعادلات يصعب تحليلها لذلك نلجأ للقانون العام

القانون العام

$أ س^٢ + ب س + جـ = صفر$

$$\boxed{س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢أ}}$$

مثال ② أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية فى ح

[١] $س^٢ - ٤س = -٢$ حيث $\sqrt{٢} \simeq ١٫٤$

الحل $س^٢ - ٤س + ٢ = ٠$

$\boxed{أ = ١}$ ، $\boxed{ب = -٤}$ ، $\boxed{جـ = ٢}$

$$س = \frac{٤ \pm \sqrt{١٦ - ٤ \times ١ \times ٢}}{٢ \times ١} = \frac{٤ \pm ٢\sqrt{٢}}{٢}$$

$$س = \frac{٤ \pm ٢ \times ١٫٤}{٢} = \frac{٤ \pm ٢٫٨}{٢}$$

$س_١ = \frac{٤ + ٢٫٨}{٢}$ | $س_٢ = \frac{٤ - ٢٫٨}{٢}$

$\boxed{س_١ = ٣٫٤}$ | $\boxed{س_٢ = ٠٫٦}$

$\therefore م.ح = \{٣٫٤ ، ٠٫٦\}$

مثال ⑤ أوجد مجموعة حل المعادلة $٣س^٢ = ٥س - ١$ مقرباً الناتج لرقمين عشريين

الحل

$٣س^٢ - ٥س + ١ = ٠$

$\boxed{أ = ٣}$ $\boxed{ب = -٥}$ $\boxed{جـ = ١}$

$$س = \frac{٥ \pm \sqrt{٢٥ - ٤ \times ٣ \times ١}}{٢ \times ٣} = \frac{٥ \pm \sqrt{١٣}}{٦}$$

$س_١ = \frac{٥ + \sqrt{١٣}}{٦}$ | $س_٢ = \frac{٥ - \sqrt{١٣}}{٦}$

$\boxed{س_١ = ١٫٤٣}$ | $\boxed{س_٢ = ٠٫٢٣}$

$\therefore م.ح = \{١٫٤٣ ، ٠٫٢٣\}$

مثال ③ $س(س - ١) = ٤$ الحل

نضرب س × القوس أولاً ونصفر المعادلة

$س^٢ - س - ٤ = صفر$

$\boxed{أ = ١}$ $\boxed{ب = -١}$ $\boxed{جـ = -٤}$

$$س = \frac{١ \pm \sqrt{١ - ٤ \times ١ \times -٤}}{٢ \times ١} = \frac{١ \pm \sqrt{١٧}}{٢}$$

$س_١ = \frac{١ + \sqrt{١٧}}{٢}$ | $س_٢ = \frac{١ - \sqrt{١٧}}{٢}$

$\boxed{س_١ = ٢٫٥٦}$ | $\boxed{س_٢ = -١٫٥٦}$

$\therefore م.ح = \{٢٫٥٦ ، -١٫٥٦\}$

[٤] $(س - ٣)^٢ - ٥س = صفر$

الحل نفك القوس أولاً

$س^٢ - ٦س + ٩ - ٥س = صفر$

$س^٢ - ١١س + ٩ = صفر$

$\boxed{أ = ١}$ ، $\boxed{ب = -١١}$ ، $\boxed{جـ = ٩}$

$$س = \frac{١١ \pm \sqrt{١٢١ - ٤ \times ١ \times ٩}}{٢ \times ١} = \frac{١١ \pm \sqrt{٨٥}}{٢}$$

$س_١ = \frac{١١ + \sqrt{٨٥}}{٢}$ | $س_٢ = \frac{١١ + \sqrt{٨٥}}{٢}$

$\boxed{س_١ = ٠٫٨٩}$ | $\boxed{س_٢ = ١٠٫١}$

$\therefore م.ح = \{٠٫٨٩ ، ١٠٫١\}$

٥ س + ٤/س = ٦ الحل

بضرب المعادلة × س

س × س + ٤/س × س = ٦ × س

س² + ٤ = ٦ س

س² − ٦ س + ٤ = صفر

أ = ١ ، ب = −٦ ، جـ = ٤

س = (٦ ± √(٣٦ − ٤ × ١ × ٤)) / (٢ × ١) = (٦ ± ٢√٥) / ٢

س١ = (٦ + ٢√٥) / ٢ ، س٢ = (٦ − ٢√٥) / ٢

س١ = ٥٫٢ ، س٢ = ٠٫٧٦

٦ ٨/س² + ١/س = ١ الحل

بضرب المعادلة × س²

٨/س² × س² + ١/س × س² = ١ × س²

٨ + س = س²

س² − س − ٨ = صفر

أ = ١ ، ب = −١ ، جـ = −٨

س = (١ ± √(١ − ٤ × ١ × −٨)) / (٢ × ١) = (١ ± √٣٣) / ٢

س١ = (١ + √٣٣) / ٢ ، س٢ = (١ − √٣٣) / ٢

س١ = ٣٫٣٧ ، س٢ = −٢٫٣٧

∴ م.ح = {٣٫٣٧ ، −٢٫٣٧}

٧ س/٣ = ١/(٥ − س) الحل

بضرب مقص

٥ س − س² = ٣

س² − ٥ س + ٣ = ٠

أ = ١ ، ب = −٥ ، جـ = ٣

س = (٥ ± √(٢٥ − ٤ × ١ × ٣)) / (٢ × ١) = (٥ ± √١٣) / ٢

س١ = (٥ + √١٣) / ٢ ، س٢ = (٥ − √١٣) / ٢

س١ = ٤٫٣ ، س٢ = ٠٫٦٩٧

∴ م.ح = {٤٫٣ ، ٠٫٦٩٧}

تمارين (٢)

١ ارسم الشكل البياني للدالة د في الفترة المعطاة ثم أوجد مجموعة حل المعادلة د(س) = ٠ مقرباً الناتج لرقم عشري واحد في كل مما يأتي

أ د(س) = س² − ٢س − ٤ ، س ∈ [−٢ ، ٤]

ب د(س) = ٢س² + ٥س ، س ∈ [−٤ ، ٢]

جـ د(س) = ٣س − س² + ٢ ، س ∈ [−١ ، ٤]

د د(س) = س(س − ٥) + ٣ ، س ∈ [٠ ، ٥]

هـ د(س) = س² − ٣ ، س ∈ [−٣ ، ٣]

٢ أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية باستخدام القانون العام

أ س² − ٢س − ٤ = ٠ حيث √٥ ≃ ٢٫٢٤

ب س² = ٢(س + ٦) ~~حيث √٥٢ = ٧٫٢~~

جـ س² − ٢(س + ٣) = ٠

د ١ − ٢/س = ٢/س²

هـ ٩س² − ٢٤س + ١٦ = ٠

و س + ٧/س + ١ = ٠

ز (س − ٣)² + ١ = ٠

٣ ارسم الشكل البياني للدالة د حيث د(س) = ٤ − س² عندما س ∈ [−٣ ، ٣]

ومن الرسم أوجد أ رأس المنحنى

ب القيمة العظمى أو الصغرى للدالة د

جـ معادلة محور التماثل د جذري المعادلة س² = ٤

(الدرس الخامس)

حل معادلتين في متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية

لحل المعادلتين

١ نفصل المعادلة من الدرجة الأولى

٢ نفصل المعادلة من الدرجة الثانية

← نعوض في ٢ من ١

← نفك الأقواس و نجمع المتشابهة

← نحلل ونوجد قيم المتغير الأول

← نعوض في ١ ونوجد قيم المتغير الثاني

← نكتب م.ح

مثال ١ أوجد مجموعة حل كلاً من المعادلات الآتية

١ س + ص = ٤ ، س^{2} + ص^{2} = ١٠

الحل

س = ٤ − ص ← ١

س^{2} + ص^{2} − ١٠ = ٠ ← ٢

بالتعويض في ٢

(٤ − ص)^{2} + ص^{2} − ١٠ = ٠

١٦ + ص^{2} − ٨ص + ص^{2} − ١٠ = ٠

$\frac{\text{٢ص}^{2}}{٢}$ − $\frac{\text{٨ص}}{٢}$ + $\frac{٦}{٢}$ = $\frac{\text{صفر}}{٢}$

ص^{2} − ٤ص + ٣ = صفر

(ص − ١)(ص − ٣) = ٠

ص = ١ | ص = ٣

بالتعويض في ١

س = ٤ − ١ | س = ٤ − ٣

س = ٣ | س = ١

∴ م.ح = {(٣، ١)، (١، ٣)}

٢ س − ٢ص = ٥ ، س ص + ٣ = ٠

الحل

س = ٥ + ٢ص ← ١

س ص + ٣ = ٠ ← ٢

بالتعويض في ٢

(٥ + ٢ص) ص + ٣ = ٠

٢ص^{2} + ٥ص + ٣ = ٠

(٢ص + ٣)(ص + ١) = ٠

٢ص ، ٣ ؛ ص ، ١
٢ص + ٣ص = ٥ص

ص = $\frac{-٣}{٢}$ | ص = −١

بالتعويض في ١

س = ٥ + ٢ × $\frac{-٣}{٢}$ | س = ٥ + ٢ × −١

س = ٥ − ٣ | س = ٥ − ٢

س = ٢ | س = ٣

∴ م.ح = {(٢، $\frac{-٣}{٢}$)، (٣، −١)}

٣ ص − س = ٢ ، س^{2} + س ص − ٤ = ٠

الحل

ص = ٢ + س ← ١

س^{2} + س ص − ٤ = ٠ ← ٢

بالتعويض في ٢

س^{2} + س(٢ + س) − ٤ = ٠

س^{2} + ٢س + س^{2} − ٤ = ٠

$\frac{\text{٢س}^{2}}{٢}$ + $\frac{\text{٢س}}{٢}$ − $\frac{٤}{٢}$ = ٠

س^{2} + س − ٢ = ٠

(س + ٢)(س − ١) = ٠

س = −٢ | س = ١

بالتعويض في ١

ص = ٢ + (−٢) | ص = ٢ + ١

ص = ٠ | ص = ٣

∴ م.ح = {(−٢، ٠)، (١، ٣)}

٤ س + ١ = ٠ ، س^2 + ص^2 = ١٧

الحل

س + ١ = ٠ ⟸ $\boxed{\text{س} = -١}$

بالتعويض في ②

(-١)^2 + ص^2 = ١٧

١ + ص^2 = ١٧

ص^2 = ١٧ - ١ ⟸ $\sqrt{\text{ص}^2} = \sqrt{١٦}$

$\boxed{\text{ص} = \pm ٤}$

∴ م.ح = {(-١ ، ٤) ، (-١ ، -٤)}

---

٥ س - ص = ٠ ، س ص = ١

الحل

س = ص

$\boxed{\text{س} = \text{ص}}$ بالتعويض في ②

س × س = ١ ⟸ $\sqrt{\text{س}^2} = \sqrt{١}$

$\boxed{\text{س} = \pm ١}$ ∴ س = ص

∴ $\boxed{\text{ص} = \pm ١}$

∴ م.ح = {(١ ، ١) ، (-١ ، -١)}

---

٦ س + ص = ٠ ، ٢س^2 - ص^2 = ٤

الحل

س = -ص ← ①

بالتعويض في ②

٢(-ص)^2 - ص^2 = ٤

٢ص^2 - ص^2 = ٤ ⟸ $\sqrt{\text{ص}^2} = \sqrt{٤}$

$\boxed{\text{ص} = \pm ٢}$ ∴ $\boxed{\text{س} = \mp ٢}$

∴ م.ح = {(٢ ، -٢) ، (-٢ ، ٢)}

---

٥ س - ٢ص = ٠ ، س^2 - ص^2 = ٣

الحل

س = ٢ص ← ①

س^2 - ص^2 - ٣ = ٠ ← ②

بالتعويض في ②

(٢ص)^2 - ص^2 - ٣ = ٠

٤ص^2 - ص^2 - ٣ = ٠

٣ص^2 - ٣ = ٠ نقسم على ③

ص^2 - ١ = ٠

(ص - ١)(ص + ١) = ٠

$\boxed{\text{ص} = ١}$ | $\boxed{\text{ص} = -١}$ بالتعويض في ①

س = ٢ × ١ | س = ٢ × -١

$\boxed{\text{س} = ٢}$ | $\boxed{\text{س} = -٢}$

∴ م.ح = {(٢ ، ١) ، (-٢ ، -١)}

---

٦ ص + ٢س = ٧ ، ٢س^2 + س + ٣ص = ١٩

الحل

ص = ٧ - ٢س ← ①

٢س^2 + س + ٣ص - ١٩ = ٠ ← ②

بالتعويض في ②

٢س^2 + س + ٣(٧ - ٢س) - ١٩ = ٠

٢س^2 + س + ٢١ - ٦س - ١٩ = ٠

٢س^2 - ٥س + ٢ = ٠ (٢س - ١)(س - ٢)

(٢س - ١)(س - ٢) = ٠

-٤س

+ -س

-٥س

$\boxed{\text{س} = \frac{١}{٢}}$ | $\boxed{\text{س} = ٢}$

بالتعويض في ①

ص = ٧ - ٢ × $\frac{١}{٢}$ | ص = ٧ - ٢ × ٢ = ٧ - ٤

$\boxed{\text{ص} = ٦}$ | $\boxed{\text{ص} = ٣}$

∴ م.ح = {($\frac{١}{٢}$ ، ٦) ، (٢ ، ٣)}

لاحظ عددان س ، ص

- مجموع مربعيهما ← س^2 + ص^2
- الفرق بين مربعيهما ← س^2 - ص^2
- حاصل ضربهما ← س ص
- مساحة المستطيل ← س ص
- قطر المستطيل ← س^2 + ص^2 = مربع القطر
- وتر المثلث القائم ← س^2 + ص^2 = مربع الوتر
- مربع مجموعهما ← (س + ص)^2
- مربع الفرق بينهم ← (س - ص)^2
- قطر المعين وطول ضلعه ← س^2 + ص^2 = ٤ × (الضلع)^2

حيث س ، ص طول قطرية

٧ مستطيل يزيد طوله عن عرضه بمقدار ٣ سم ومساحته ٢٨ سم^{٢} أوجد محيطه . **الحل**

نفرض أن الطول س سم ، العرض ص سم

س − ص = ٣ ، س ص = ٢٨

س = ص + ٣ ← ①

س ص − ٢٨ = ٠ ← ②

بالتعويض في ②

(ص + ٣) ص − ٢٨ = ٠

ص^{٢} + ٣ص − ٢٨ = ٠

(ص − ٤)(ص + ٧) = ٠

$\boxed{\text{ص = ٤}}$ | $\boxed{\text{ص = −٧}}$ × مرفوض

بالتعويض في ①

س = ٣ + ٤ $\boxed{\text{س = ٧}}$

∴ الطول = ٧ سم ، العرض = ٤ سم

∴ المحيط = (الطول + العرض) × ٢

= (٧ + ٤) × ٢ = ٢٢ سم

٨ مثلث قائم الزاوية طول وتره ١٣ سم ، محيطه يساوي ٣٠ سم أوجد طول ضلعي القائمة .

نفرض أن طول ضلعي القائمة هما س ، ص

∴ س^{٢} + ص^{٢} = ١٦٩ ، من فيثاغورث

∴ س + ص + ١٣ = ٣٠ من المحيط

س + ص = ٣٠ − ١٣ $\boxed{\text{س + ص = ١٧}}$

س = ١٧ − ص ← ①

س^{٢} + ص^{٢} − ١٦٩ = ٠ ← ②

بالتعويض في ②

(١٧ − ص)^{٢} + ص^{٢} − ١٦٩ = ٠

٢٨٩ − ٣٤ص + ص^{٢} + ص^{٢} − ١٦٩ = ٠

$\frac{\text{٢ص}^{٢}}{٢}$ − $\frac{\text{٣٤ص}}{٢}$ + $\frac{١٢٠}{٢}$ = $\frac{٠}{٢}$

ص^{٢} − ١٧ص + ٦٠ = ٠

(ص − ١٢)(ص − ٥) = ٠

$\boxed{\text{ص = ١٢}}$ | $\boxed{\text{ص = ٥}}$

بالتعويض في ①

س = ١٧ − ١٢ | س = ١٧ − ٥

$\boxed{\text{س = ٥}}$ | $\boxed{\text{س = ١٢}}$

∴ ضلعي القائمة هما ٥ سم ، ١٢ سم #

٩ مجموع عددين صحيحين هو ٩ والفرق بين مربعيهما ٢٧ . أوجد العددين . **الحل**

نفرض أن العددان هما س ، ص

س + ص = ٩ ، س^{٢} − ص^{٢} = ٢٧

س = ٩ − ص ← ①

س^{٢} − ص^{٢} − ٢٧ = ٠ ← ② بالتعويض في ②

(٩ − ص)^{٢} − ص^{٢} − ٢٧ = ٠

٨١ − ١٨ص + $\cancel{\text{ص}^{٢}}$ − $\cancel{\text{ص}^{٢}}$ − ٢٧ = ٠

−١٨ص + ٥٤ = ٠

$\frac{\text{−١٨ص}}{−١٨}$ = $\frac{−٥٤}{−١٨}$ ← $\boxed{\text{ص = ٣}}$

بالتعويض في ①

س = ٩ − ٣ ← $\boxed{\text{س = ٦}}$

∴ العددان هما ٦ ، ٣

١٠ مستطيل طول قطره ٥ سم ومحيطه ١٤ سم أوجد بعديه . **الحل**

نفرض أن بعديه هما س ، ص

س + ص = ٧ ← ① من المحيط

س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥ ← ② من القطر

س = ٧ − ص ← ①

س^{٢} + ص^{٢} − ٢٥ = ٠ ← ② بالتعويض في ②

(٧ − ص)^{٢} + ص^{٢} − ٢٥ = ٠

٤٩ − ١٤ص + ص^{٢} + ص^{٢} − ٢٥ = ٠

$\frac{\text{٢ص}^{٢}}{٢}$ − $\frac{\text{١٤ص}}{٢}$ + $\frac{٢٤}{٢}$ = $\frac{٠}{٢}$

ص^{٢} − ٧ص + ١٢ = ٠

(ص − ٣)(ص − ٤) = ٠

$\boxed{\text{ص = ٣}}$ | $\boxed{\text{ص = ٤}}$ بالتعويض في ①

س = ٧ − ٣ | س = ٧ − ٤

$\boxed{\text{س = ٤}}$ | $\boxed{\text{س = ٣}}$

∴ بعديه هما ٤ سم ، ٣ سم

ملحوظة البعدين هما (الطول ، العرض)

تمارين (٣)

١ أكمل ما يأتي:

(١) المعادلة س ص = ٣ من الدرجة ....

(٢) مجموعة حل المعادلتين س = ١ ، س ص = ١ هي ......

(٣) مجموعة حل المعادلتين س = ١ ، س² + ص² = ١ هي ......

(٤) مجموعة حل المعادلتين س = ٢ ، س ص = ٦ هي ......

(٥) مجموعة حل المعادلتين س = ص ، س ص = ١ هي ......

(٦) مجموعة حل المعادلتين س - ص = ٠ ، س ص = ٩ هي ......

(٧) عددان موجبان مجموعهما ٧ ، حاصل ضربهما ١٢ فإن العددين هما ......

(٨) إذا كان أ ب = ٣ ، أ ب² = ١٢ فإن ب تساوي ......

٢ أوجد مجموعة حل أزواج المعادلات الآتية في ح

(١) س - ص = ١ ، س² + ص² = ٢٥

(٢) ص - س = ٢ ، س² + س ص - ٤ = ٠

(٣) س - ٢ص - ١ = ٠ ، س² - س ص = ٠

(٤) س + ص = ٥ ، س ص = ٦

٣ عددان صحيحان مجموعهم ٧ ومجموع مربعيهما ٢٥ أوجد العددين

٤ مستطيل محيطه ٢٤ سم ومساحته ٣٥ سم² أوجد طول بعديه

٥ معين الفرق بين طولي قطريه ٤ سم ، محيطه يساوي ٤٠ سم أوجد طول كل من قطريه

٦ عددان أحدهما معكوس جمعي للآخر ومجموع مربعيهما هو ٢ أوجد العددين

٧ عددان الفرق بينهم ٥ وحاصل ضربهما ٣٦ أوجد العددين

(اختبار على الوحدة الأولى)

١ أكمل ما يأتي

(١) إذا كان المستقيمان ٣س + ٥ص = ٤ ، أ س + ١٠ص = ٣ متوازيان فإن أ = ...

(٢) مجموعة حل المعادلتين ص - ٤ = ٣ ، س - ١ = ٠ في ح هي ......

(٣) مجموعة حل المعادلة س³ + ٤س = ٠ في ح هي ......

(٤) مجموعة الحل للمعادلتين س - ص = ٠ ، س ص = ٤ في ح × ح هي ......

(٥) منحنى الدالة د(س) = س² - ٥س يقطع محور السينات في النقطتين ......

(٦) مجموعة حل المعادلتين س + ٣ص = ٤ ، ٣ص + س = ١ في ح × ح هي ......

٢ (أ) أوجد جبرياً مجموعة حل المعادلتين في ح × ح

٢س - ص = ٣ ، س + ٢ص = ٤

(ب) أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية مقرباً الناتج لأقرب ثلاثة أرقام عشرية

س² - ٣س = ٨

٣ (أ) أوجد في ح × ح مجموعة حل المعادلتين

س - ص = ٤ ، س² + ص² = ٢٦

(ب) ارسم الشكل البياني للدالة

د(س) = س² - ٢س + ١ في الفترة [-٢ ، ٤]

ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة س² - ٢س + ١ = ٠

٤ (أ) أوجد بيانياً مجموعة حل المعادلتين

ص - ٥ = ٠ ، س + ص = ٣

(ب) مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٣ سم ومحيطه ١٦ سم أوجد كلاً من بعديه ومساحته

(الوحدة الثانية)

الدرس الأول [أصفار الدالة]

أصفار الدالة: هي قيم س التي تجعل الدالة تساوي صفر

مثلاً د(س) = س − ٢ فيمنها تساوي صفر عند $\boxed{\text{س} = ٢}$

∴ تقول أن الدالة أصفارها ص(د) = {٢}

خطوات حساب أصفار الدالة

① نساوي الدالة بالصفر
② نحلل ونوجد قيم س
③ نكتب ص(د)

ملحوظة إذا كانت الدالة كسرية (بسط ومقام)

نحسب أصفار البسط لوحدها ونحسب أصفار المقام لوحدها ثم نحسب {أصفار البسط} − {أصفار المقام}

← بمعنى اللي موجود في البسط وغير موجود في المقام

ملحوظة ← أي دالة لا تحلل مثل مجموع المربعين (س^{2} + عدد) أصفارها ∅

← أي دالة ثابتة أصفارها ∅

ماعدا د(س) = صفر أصفارها ح

مثال ① احسب أصفار كلاً من الدوال الآتية:

① د(س) = (س − ١)(س − ٢) **الحل**

(س − ١)(س − ٢) = ٠ متحلله جاهزة

$\boxed{\text{س} = ١}$ | $\boxed{\text{س} = ٢}$ ∴ ص(د) = {١، ٢}

② د(س) = س^{2} − ١٦ **الحل**

س^{2} − ١٦ = ٠ (س − ٤)(س + ٤) = ٠

$\boxed{\text{س} = ٤}$ ، $\boxed{\text{س} = -٤}$

∴ ص(د) = {٤، −٤}

③ د(س) = س^{2} − ٢س **الحل**

س^{2} − ٢س = ٠

س(س − ٢) = ٠

$\boxed{\text{س} = ٠}$ | $\boxed{\text{س} = ٢}$

∴ ص(د) = {٠، ٢}

④ د(س) = −٧ ثابتة أصفارها ∅

⑤ د(س) = س^{2} + ٩ لا تحلل أصفارها ∅

⑥ د(س) = صفر أصفارها ح

⑦ د(س) = $\dfrac{\text{٢س}^{٣} - \text{١٨س}}{\text{س}^{٢} + \text{٢س} - ٣}$ **الحل**

$\dfrac{\text{٢س}^{٣}}{٢} - \dfrac{\text{١٨س}}{٢} = \dfrac{٠}{٢}$

س^{3} − ٩س = ٠

س(س^{2} − ٩) = ٠

س(س − ٣)(س + ٣) = ٠

$\boxed{\text{س} = ٠}$ | $\boxed{\text{س} = ٣}$ | $\boxed{\text{س} = -٣}$

أصفار البسط = {٠، ٣، −٣}

س^{2} + ٢س − ٣ = ٠

(س + ٣)(س − ١) = ٠

$\boxed{\text{س} = -٣}$ | $\boxed{\text{س} = ١}$

∴ أصفار المقام = {−٣، ١}

∴ ص(د) = {٠، ٣}

⑧ د(س) = ٦س^{2} + س − ١٢ **الحل**

٦س^{2} + س − ١٢ = ٠

(٢س + ٣)(٣س − ٤) = ٠

(٢س + ٣)
(٣س − ٤)

٩س
−٨س
س

$\boxed{\text{س} = \frac{-٣}{٢}}$ | $\boxed{\text{س} = \frac{٤}{٣}}$

∴ ص(د) = $\{\frac{-٣}{٢}، \frac{٤}{٣}\}$

وإذا غامرت في شرف مروم ∴ فلا ترضى بما دون النجوم

٩ د(س) = س^٤ + ١٢٥ س

الحل: س^٤ + ١٢٥ س = ٠

س (س^٣ + ١٢٥) = ٠

س (س + ٥) (س^٢ − ٥س + ٢٥) = ٠

س = ٠ | س = −٥ | ∅

∴ ص(د) = {٠ ، −٥}

مثال ٢ إذا كانت {−٣ ، ٣} هي مجموعة أصفار الدالة د(س) = س^٢ + م فأوجد قيمة م

الحل: نعوض عن قيم س مرة (−٣) ومرة (٣) ونساوي الناتج بالصفر

(−٣)^٢ + م = ٠ ⇐ م = −٩

(٣)^٢ + م = ٠ ⇐ م = −٩

∴ قيمة م = −٩

مثال ٣ إذا كانت أصفار الدالة د حيث د(س) = م س^٢ + ب س + ١٥ هي {٣ ، ٥} أوجد قيمة كل من م ، ب

الحل

عند س = ٣

م × (٣)^٢ + ب × ٣ + ١٥ = ٠

٩م + ٣ب + ١٥ = ٠ ← (١)

م × (٥)^٢ + ب × ٥ + ١٥ = ٠

٢٥م + ٥ب + ١٥ = ٠ ← (٢)

نضرب (١) × ٥ ونضرب (٢) × −٣

٤٥م + ~~١٥ب~~ + ٧٥ = ٠

−٧٥م − ~~١٥ب~~ − ٤٥ = ٠ بالجمع

−٣٠م + ٣٠ = ٠

−٣٠م / −٣٠ = −٣٠ / −٣٠ ⇐ م = ١ بالتعويض في (١)

لنحصل على قيمة ب

٩ × ١ + ٣ب + ١٥ = ٠ ⇐ ٣ب = −٢٤ ÷ ٣

ب = −٨

الدرس الثاني [مجال الدالة]

مجال الدالة هو قيم س التي تجعل الدالة معرفة فمثلاً د(س) = ٣ / (س − ١) يكون لها الناتج عند التعويض عن س بأي عدد ماعدا س = ١ لأنه ٣ / (١ − ١) = ٣ / ٠ = غير معرفة

⇐ فنقول أننا يمكن أن نعوض عن س بأي عدد ماعدا س = ١

فنقول أن مجال الدالة هو ح − {١}

⇐ أي مجموعة التعويض هي جميع الأعداد ماعدا {١}

⇐ مجال الدالة الكسرية = ح − {أصفار المقام}

⇐ **ملاحظات هامة**

⇐ الدالة التي ليس لها مقام مجالها ح

⇐ الدالة التي مقامها عدد ثابت مجالها ح

⇐ الدالة التي مقامها لا يحلل مجالها ح

⇐ عند حساب المجال نشتغل على المقام فقط | خطوات المجال

١ نساوي المقام بالصفر

٢ نحلل ونوجد قيم س

٣ المجال = ح − {قيم س}

⇐ المجال المشترك = ح − {كله بدون تكرار}

مثال ١ أوجد مجال كلاً مما يأتي

١ هـ(س) = (س + ٣) / ٤ مجالها ح
← عدد ثابت

٢ هـ(س) = (س^٢ − ١) / (س^٢ + ١) مجالها ح
← لا يحلل

٣ هـ(س) = ٥س^٢ − ٢٥ مجالها ح
(ليس لها مقام)

٤ هـ(س) = (س − ٢) / (٢س) مجالها ح − {٠}

٢س / ٢ = ٠ / ٢ ⇐ س = ٠

٥ $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^2 + ١}{\text{س}^2 - \text{س}}$ الحل

س² − س = ٠

س (س − ١) = ٠

$\boxed{\text{س} = ٠}$ | $\boxed{\text{س} = ١}$

∴ المجال = ح − {٠، ١}

مثال ٢ أوجد المجال المشترك لكل من

١ $\text{د}_1(\text{س}) = \dfrac{١}{\text{س}}$ ، $\text{د}_2(\text{س}) = \dfrac{٢}{\text{س} + ١}$

الحل

س = ٠

المجال = ح − {٠}

س + ١ = ٠

$\boxed{\text{س} = -١}$

المجال = ح − {−١}

∴ المجال المشترك = ح − {٠، −١}

٢ $\text{د}_1(\text{س}) = \dfrac{٣}{\text{س}^2 - \text{س}}$ ، $\text{د}_2(\text{س}) = \dfrac{٢\text{س} - ٣}{\text{س}^2 - ١}$

الحل

س² − س = ٠

س (س − ١) = ٠

$\boxed{\text{س} = ٠}$ | $\boxed{\text{س} = ١}$

المجال = ح − {٠، ١}

س² − ١ = ٠

(س − ١)(س + ١) = ٠

$\boxed{\text{س} = ١}$ | $\boxed{\text{س} = -١}$

المجال = ح − {١، −١}

∴ المجال المشترك = ح − {٠، ١، −١}

٣ $\dfrac{٤\text{س} - ٣}{\text{س}^2 - \text{س}}$ ، $\dfrac{\text{س} - ١}{\text{س}^2 + ١٦}$ ، $\dfrac{٥\text{س}}{\text{س}^2 - ٢\text{س} - ٣}$

الحل

س² − س = ٠ ← س (س − ١) = ٠

$\boxed{\text{س} = ٠}$ ، $\boxed{\text{س} = ١}$ مجال د١ = ح − {٠، ١}

س² + ١٦ = ٠ لا تحلل مجال د٢ = ح

س² − ٢س − ٣ = ٠ ← (س − ٣)(س + ١) = ٠

$\boxed{\text{س} = ٣}$ ، $\boxed{\text{س} = -١}$ مجال د٣ = ح − {٣، −١}

∴ المجال المشترك = ح − {٠، ١، ٣، −١}

مثال ٣ إذا كان مجال الدالة د :

$\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} - ١}{\text{س}^2 - \text{أ}\text{س} + ٩}$ هو ح − {٣}

فأوجد قيمة أ الحل

∴ مجال الدالة هو ح − {٣}

نعوض في المقام عن $\boxed{\text{س} = ٣}$ ونساويه بالصفر

(٣)² − أ × ٣ + ٩ = ٠

٩ − ٣أ + ٩ = ٠

$\dfrac{\cancel{-٣}\text{أ}}{\cancel{-٣}} = \dfrac{-١٨}{-٣}$ ⟸ $\boxed{\text{أ} = ٦}$ #

الدرس الثالث [اختزال الكسر الجبري]

← خطوات اختزال الكسر الجبري

١ نحلل البسط والمقام تحليلاً تاماً إن أمكن

٢ نكتب المجال = ح − {أصفار المقام}

٣ نختصر العوامل المتشابهة ونكتب الناتج في أبسط صورة

ملحوظة إذا كان $\boxed{\text{د}_1 = \text{د}_2}$

فإن مجال د١ = مجال د٢

د١(س) = د٢(س) بعد الاختصار

← لجميع قيم س التي تنتمي للمجال المشترك

أي أننا نأخذ المجال المشترك

أي لا يشترط أن يكون مجال د١ = مجال د٢

مثال ١ اختصر ما يأتي في أبسط صورة

$\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^2 - ٤}{\text{س}^3 - ٨}$ الحل

$\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\cancel{(\text{س} - ٢)}(\text{س} + ٢)}{\cancel{(\text{س} - ٢)}(\text{س}^2 + ٢\text{س} + ٤)}$

المجال = ح − {٢}

$\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} + ٢}{\text{س}^2 + ٢\text{س} + ٤}$

$\text{د}(\text{س}) = \dfrac{٢\text{س}^2 + ٧\text{س} + ٦}{٤\text{س}^2 + ٤\text{س} - ٣}$ الحل

$\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\cancel{(٢\text{س} + ٣)}(\text{س} + ٢)}{\cancel{(٢\text{س} + ٣)}(٢\text{س} - ١)}$

المجال = ح − {$\frac{١}{٢}$، $\frac{-٣}{٢}$} $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} + ٢}{٢\text{س} - ١}$

أ/ وليد محمد عكاشة
01002097866

مثال ② أثبت أن $\text{ن}_1 = \text{ن}_2$ حيث

$$\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{2\text{س}}{2\text{س}+8} \quad ، \quad \text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{س}^2+4\text{س}}{\text{س}^2+8\text{س}+16}$$

الحل

$$\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{\cancel{2}\,\text{س}}{\cancel{2}(\text{س}+4)}$$

المجال $= \text{ح} - \{-4\}$

$$\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}+4}$$

$$\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{س}\cancel{(\text{س}+4)}}{(\text{س}+4)\cancel{(\text{س}+4)}}$$

المجال $= \text{ح} - \{-4\}$

$$\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}+4}$$

$\because$ مجال ن_1 = مجال ن_2

$\text{ن}_1(\text{س}) = \text{ن}_2(\text{س})$ بعد الاختصار

$\therefore \boxed{\text{ن}_1 = \text{ن}_2}$

مثال ③ أثبت أن $\text{ن}_1 = \text{ن}_2$ حيث

$$\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{\text{س}^3-1}{\text{س}^3+\text{س}^2+\text{س}} \quad ، \quad \text{ن}_2(\text{س}) = \frac{(\text{س}-1)(\text{س}^2+1)}{\text{س}^3+\text{س}}$$

الحل

$$\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{(\text{س}-1)\cancel{(\text{س}^2+\text{س}+1)}}{\text{س}\cancel{(\text{س}^2+\text{س}+1)}}$$

المجال $= \text{ح} - \{0\}$

$$\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{\text{س}-1}{\text{س}}$$

$$\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{(\text{س}-1)\cancel{(\text{س}^2+1)}}{\text{س}\cancel{(\text{س}^2+1)}}$$

المجال $= \text{ح} - \{0\}$

$$\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{س}-1}{\text{س}}$$

$\because$ مجال ن_1 = مجال ن_2

$\text{ن}_1(\text{س}) = \text{ن}_2(\text{س})$ بعد الاختصار

$\therefore \boxed{\text{ن}_1 = \text{ن}_2}$

علمتني الرياضيات :-
(إن لكل مجهول قيمة فلا تحتقر أحد لا تعرفه)

تمارين (4)

1 أكمل ما يأتي

① مجموعة أصفار الدالة $\text{د}(\text{س}) = -3\text{س}$ هي ....

② إذا كانت $\text{ص}(\text{د}) = \{2\}$ حيث $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^3 - \text{ل}$ فإن ل = ...

③ مجموعة أصفار الدالة $\text{س}^3 + \text{س}^2 = 0$ هي ....

④ مجال الدالة $\text{د}(\text{س}) =$ صفر هو ......

⑤ أصفار الدالة $\text{د}(\text{س}) =$ صفر هو ....

⑥ مجال الدالة $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}-3}{\text{س}^2-9}$ هو ....

⑦ أصفار الدالة $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}-3}{\text{س}^2-9}$ هي ....

⑧ مجال الدالة $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}-3}{2}$ هو ....

⑨ مجال الدالة $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}-3}{\text{س}^2+1}$ هو ....

⑩ إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \frac{1}{2}$ فإن $\text{ص}(\text{د}) =$ ......

2 أوجد المجال المشترك لكل من الكسور الآتية

1) $\frac{\text{س}-2}{\text{س}+4}$ ، $\frac{7}{\text{س}-3}$ ، $\frac{\text{س}}{\text{س}^2+4}$

2) $\frac{\text{س}^2-4}{\text{س}^2-5\text{س}+6}$ ، $\frac{7}{\text{س}^2-9}$ ، $\text{س} - \text{س}^2 - 5$

3) $\frac{1}{2\text{س}}$ ، $\frac{\text{س}-1}{5}$

3 أثبت أن $\text{ن}_1 = \text{ن}_2$ في كلاً مما يأتي

① $\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{1}{\text{س}}$ ، $\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{س}^2+4}{\text{س}^3+4\text{س}}$

② $\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{3\text{س}}{3\text{س}+12}$ ، $\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{س}^2+4\text{س}}{\text{س}^2+8\text{س}+16}$

4 أثبت أنه لجميع قيم س التي تنتمي إلى المجال المشترك $\text{ن}_1(\text{س}) = \text{ن}_2(\text{س})$ حيث

① $\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{\text{س}^2+2\text{س}}{\text{س}^2-4}$ ، $\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{س}^2-\text{س}}{\text{س}^2-3\text{س}+2}$

5 إذا كان $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}-2}{\text{س}^2-\text{س}-6}$ فأوجد مجال $\text{ن}(\text{س})$

الدرس الرابع

العمليات على الكسور الجبرية

[الجمع - الطرح - الضرب - القسمة]

* خطوات الحل :-

[١] نحلل بسط ومقام الكسرين تحليلاً تاماً إن أمكن

[٢] نكتب المجال = ح - {أصفار المقام}

← في حالة القسمة عند إيجاد المجال

المجال = ح - {أصفار مقام الأول وأصفار بسط ومقام الكسر الثاني}

[٣] نختصر العوامل المتشابهة

← في الجمع والطرح نختزل كل كسر على حدى

← في الضرب نختصر المتشابهة من أي الكسرين

[٤] نجري العملية الموجودة إضافة جمع أو طرح أو ضرب

[٥] نبسط ونكتب الناتج

ملحوظة هامة في مسألة القسمة

يجب أولاً أن نحول القسمة لضرب باستخدام قاعدة [شيئ] [إضرب] [شقلب]

ثم نكمل حل المسألة مثل الخطوات السابقة

مثال [١] أوجد ه(س) في أبسط صورة مبيناً مجال ه

[1] $ه(س) = \frac{س}{س^2+٢س} + \frac{س-٢}{س^2-٤}$ ثم أوجد ه(-٢) إن أمكن [الحل]

$$ه(س) = \frac{\cancel{س}}{\cancel{س}(س+٢)} + \frac{\cancel{س-٢}}{(\cancel{س-٢})(س+٢)}$$

المجال = ح - {٠، -٢، ٢}

$$ه(س) = \frac{١}{س+٢} + \frac{١}{س+٢} = \frac{٢}{س+٢}$$

∵ -٢ ∉ لمجال الدالة

∴ ه(-٢) غير ممكنة (غير معرفة)

[٢] $ه(س) = \frac{س-٣}{س^2-٧س+١٢} - \frac{٤}{س^2-٤س}$ [الحل]

$$ه(س) = \frac{\cancel{س-٣}}{(\cancel{س-٣})(س-٤)} - \frac{٤}{س(س-٤)}$$

المجال = ح - {٣، ٤، ٠}

$$ه(س) = \frac{١}{س-٤} - \frac{٤}{س(س-٤)}$$

$$ه(س) = \frac{\cancel{س-٤}}{س(\cancel{س-٤})} = \frac{١}{س}$$

[٣] $ه(س) = \frac{س^2-٣س+٢}{س^2-١} \div \frac{٣س-١٥}{س^2-٤س-٥}$ [الحل]

$$ه(س) = \frac{س^2-٣س+٢}{س^2-١} \times \frac{س^2-٤س-٥}{٣س-١٥}$$

$$ه(س) = \frac{(\cancel{س-١})(س-٢)}{(\cancel{س+١})(\cancel{س-١})} \times \frac{(\cancel{س-٥})(\cancel{س+١})}{٣(\cancel{س-٥})}$$

المجال = ح - {١، -١، ٥}

$$ه(س) = \frac{س-٢}{٣}$$

[٤] $ه(س) = \frac{س^2-١٢س+٣٦}{س^2-٦س} \times \frac{٤س+٢٤}{٣٦-س^2}$ [الحل]

$$ه(س) = \frac{(\cancel{س-٦})(\cancel{س-٦})}{س(\cancel{س-٦})} \times \frac{٤(\cancel{س+٦})}{-(\cancel{س-٦})(\cancel{س+٦})}$$

المجال = ح - {٠، ٦، -٦}

$$∴ ه(س) = \frac{١}{س} \times \frac{٤}{-١}$$

$$ه(س) = \frac{-٤}{س}$$

لا يكف المرء عن الحلم حين يصبح عجوزاً
بل يصبح عجوزاً حين يكف عن الحلم ......

⑤ $\text{ه}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}-٦}{٢\text{س}^٢-١٥\text{س}+١٨} + \dfrac{\text{س}-٥}{١٥-١٣\text{س}+٢\text{س}^٢}$

$\boxed{\text{الحل}}$ $٢\text{س}^٢-١٣\text{س}+١٥$

$\text{ه}(\text{س}) = \dfrac{\cancel{\text{س}-٦}}{(٢\text{س}-٣)\cancel{(\text{س}-٦)}} + \dfrac{\cancel{\text{س}-٥}}{(٢\text{س}-٣)\cancel{(\text{س}-٥)}}$

$\text{المجال} = \text{ح} - \{\frac{٣}{٢} ، ٦ ، ٥\}$

$\text{ه}(\text{س}) = \dfrac{١}{٢\text{س}-٣} + \dfrac{١}{٢\text{س}-٣}$

$\text{ه}(\text{س}) = \dfrac{٢}{٢\text{س}-٣}$

⑥ $\text{ه}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}-٣}{\text{س}^٢-٧\text{س}+١٢} - \dfrac{\text{س}-٣}{٣-\text{س}}$

$\boxed{\text{الحل}}$

$\text{ه}(\text{س}) = \dfrac{\cancel{\text{س}-٣}}{\cancel{(\text{س}-٣)}(\text{س}-٤)} + \dfrac{\cancel{\text{س}-٣}}{\cancel{\text{س}-٣}}$

$\text{المجال} = \text{ح} - \{٣ ، ٤\}$

$\text{ه}(\text{س}) = \dfrac{١}{\text{س}-٤} + \dfrac{١}{١} = \dfrac{\text{س}-٤+١}{\text{س}-٤}$

توحيد مقامات

$\text{ه}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}-٣}{\text{س}-٤}$

⑦ $\text{ه}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}}{٤} + \dfrac{-٢}{\text{س}+٢}$ الحل

$\text{المجال} = \text{ح} - \{-٢\}$

$\text{ه}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}}{٤} \times \dfrac{-٢}{\text{س}+٢} = \dfrac{\text{س}^٢+٢\text{س}-٨}{٤(\text{س}+٢)}$

توحيد المقامات

$\text{ه}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^٢+٢\text{س}-٨}{٤(\text{س}+٢)}$

$\text{ه}(\text{س}) = \dfrac{(\text{س}-٢)(\text{س}+٤)}{٤(\text{س}+٢)}$

مثال ⑤ إذا كان $\text{ه}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^٢-٢\text{س}}{(\text{س}-٢)(\text{س}^٢+٢)}$

① اختصر $\text{ه}(\text{س})$ وعين المجال

② إذا كان $\text{ه}^{-١}(\text{س}) = ٣$ فما قيمة س ؟

$\text{ه}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}(\text{س}-٢)}{(\text{س}-٢)(\text{س}^٢+٢)}$

$\therefore \text{ه}^{-١}(\text{س}) = \dfrac{(\text{س}^٢+٢)\cancel{(\text{س}-٢)}}{\text{س}\cancel{(\text{س}-٢)}}$

$\text{المجال} = \text{ح} - \{٠ ، ٢\}$

لاحظنا هنا المجال من فوق وتحت طالما شقلبنا الدالة

$\text{ه}^{-١}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^٢+٢}{\text{س}}$

إذا كانت $\text{ه}^{-١}(\text{س}) = ٣$

$\therefore \dfrac{\text{س}^٢+٢}{\text{س}} = \dfrac{٣}{١}$

$\text{س}^٢+٢ = ٣\text{س}$

$\text{س}^٢-٣\text{س}+٢ = ٠$

$(\text{س}-٢)(\text{س}-١) = ٠$

$\boxed{\text{س} = ٢}$ | $\boxed{\text{س} = ١}$

مثال ③ إذا كان مجال الدالة ه حيث $\text{ه}(\text{س}) = \dfrac{\text{ب}}{\text{س}} + \dfrac{٩}{\text{س}+\text{أ}}$ هو $\text{ح} - \{٠ ، ٤\}$

، $\text{ه}(٥) = ٢$ أوجد قيمتي أ ، ب

$\boxed{\text{الحل}}$ $\text{ه}(\text{س}) = \dfrac{\text{ب}}{\text{س}} + \dfrac{٩}{\text{س}+\text{أ}}$

$\text{المجال} = \text{ح} - \{٠ ، -\text{أ}\}$

$\therefore -\text{أ} = ٤ \Leftarrow \boxed{\text{أ} = -٤}$

$\therefore \text{ه}(٥) = ٢$

$\therefore \dfrac{\text{ب}}{٥} + \dfrac{٩}{٥-٤} = ٢$

$\dfrac{\text{ب}}{٥} + ٩ = ٢ - ٩$

$\dfrac{\text{ب}}{٥} = \dfrac{-٧}{١}$

$\boxed{\text{ب} = -٣٥}$ #

تمارين (5)

① أكمل ما يأتي

[1] مجموعة أصفار الدالة $د(س) = (س-5)^2$ هي ......

[2] مجال الدالة $د(س) = \frac{س^2 - س}{س^2 - 2س - 3}$ هو ......

[3] المجال المشترك للدالتين $د_1(س) = \frac{س+1}{س}$ ، $د_2(س) = \frac{س-3}{س^2 - 5س + 6}$ هو ......

[4] أبسط صورة للكسر $\frac{2س+6}{س+3}$ هو ......

[5] إذا كان $ن(س) = \frac{س+3}{س-2}$ فإن مجال $ن^{-1}(س)$ هو ......

[6] $ن(س) = \frac{س}{س-1} + \frac{-1}{س-1} =$ ...... في أبسط صورة

[7] مجال المعكوس الجمعي للكسر $\frac{س+5}{س-1}$ هو ......

[8] مجال المعكوس الضربي للكسر $\frac{س+5}{س-1}$ هو ......

[9] إذا كانت $ن(س) = \frac{س+3}{س-1}$ فإن $ن(2) =$ ...... ، $ن(-3) =$ ...... ، $ن(1) =$ ......

[10] أبسط صورة للدالة $ن(س) = \frac{س}{س-3} \div \frac{3س}{س^2 - 9}$ هي ......

[11] مجموعة أصفار الدالة $د(س) = \frac{س-3}{س+2}$ هي ......

② أوجد ن(س) في أبسط صورة مبيناً المجال.

① $ن(س) = \frac{س^2 - 1}{س^2 + 3س + 2} \div \frac{س^2 - س}{س^2 + 2س}$

② $ن(س) = \frac{س^2 - س}{س^2 - 1} + \frac{س - 5}{س^2 - 6س + 5}$

③ $ن(س) = \frac{س^3 - 1}{س^2 - 2س + 1} \times \frac{2س - 2}{س^2 + س + 1}$

④ $ن(س) = \frac{3س^2 - 6س}{س^2 - 4} \times \frac{س^2 + 3س + 2}{س^2 + س}$

⑤ $ن(س) = \frac{س+3}{(س-2)(س+7)} \div \frac{س^2 + 3س}{2س + 14}$

⑥ $ن(س) = \frac{3س}{س^2 - 2س} - \frac{12}{س^2 - 4}$

⑦ $ن(س) = \frac{س-3}{س^2 - 7س + 12} - \frac{س-3}{3-س}$

⑧ $ن(س) = \frac{2س}{س+2} + \frac{4}{س+2}$

⑨ $ن(س) = \frac{س^2 + س - 2}{س^2 - 1} - \frac{س+5}{س^2 + 6س + 5}$

[اختبار على الوحدة الثانية]

[1] أكمل ما يأتي:

① $ن(س) = \frac{س-3}{س}$ فإن مجال $ن^{-1}(س)$ هو ......

② إذا كان $\frac{س-م}{س-3}$ معكوس الضربي $\frac{س-3}{س+2}$ فإن $م =$ ......

③ المعكوس الجمعي للكسر $\frac{س-1}{س+5}$ هو ......

④ إذا كان $ص(د) = \{2\}$ ، $د(س) = س - م$ فإن $م =$ ......

⑤ المجال المشترك للكسرين $\frac{2}{س-3}$ ، $\frac{7}{س-6}$ هو ......

⑥ أبسط صورة للكسر الجبري $\frac{5-س}{س-5}$ هو ......

[2] (أ) أوجد ن(س) في أبسط صورة مبيناً المجال

$ن(س) = \frac{س^2 - 49}{س^3 - 8} \div \frac{س+7}{س-2}$ واحسب قيمة $ن(1)$ ، $ن(-7)$ إن أمكن

(ب) أوجد المجال المشترك الذي يتساوى فيه الكسران

$ن_1(س) = \frac{س^2 + س - 12}{س^2 + 5س + 4}$ ، $ن_2(س) = \frac{س^2 - 2س - 3}{س^2 + 2س + 1}$

[3] (أ) إذا كان $ن_1(س) = \frac{س^2}{س^3 - س^2}$ ،

$ن_2(س) = \frac{س^3 + س^2 + س}{س^4 - س}$ أثبت أن $ن_1 = ن_2$

(ب) أوجد $ن^{-1}(س)$ في أبسط صورة مبيناً مجالها حيث $ن(س) = \frac{2س - 6}{س^2 - 5س + 6}$ ثم أوجد $ن(1)$ ، $ن(3)$ إن أمكن وإذا كان $ن^{-1}(س) = 5$ أوجد قيمة س

[4] (أ) أوجد ن(س) في أبسط صورة مبيناً المجال

$ن(س) = \frac{س^2 - 2س}{س^2 - 4} + \frac{2س + 6}{س^2 + 5س + 6}$

(ب) أوجد ن(س) في أبسط صورة مبيناً المجال

$ن(س) = \frac{س+1}{س^2 - س - 2} \times \frac{س^2 + 3س - 10}{3س^2 + 16س + 5}$

الوحدة الثالثة [الإحتمال]

التجربة العشوائية: هى تجربة نعرف جميع نواتجها مسبقاً ولكن لا نستطيع تحديد أى من النواتج هو الذى سيظهر

فضاء العينة (ف): هو جميع النواتج للتجربة العشوائية

الحدث (أ) هو الناتج الذى سيظهر وهو جزء من فضاء العينة

لحساب الإحتمال

ل(أ) = ن(أ) / ن(ف) = عدد عناصر الحدث / العدد الكلى

إحتمال الحدث المستحيل = صفر

إحتمال الحدث المؤكد = ١ = ١٠٠٪

صفر ≤ ل(أ) ≤ ١

مثال ① صندوق يحتوى على ١٢ كرة منها ٥ كرات زرقاء، ٤ كرات حمراء، وباقى الكرات بيضاء سحبت كرة عشوائياً أوجد إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة

أ) زرقاء = ٥/١٢ = ٠٫٤١٦

ب) ليست حمراء = (٥+٣)/١٢ = ٨/١٢ = ٢/٣

جـ) زرقاء أو حمراء = (٥+٤)/١٢ = ٩/١٢ = ٣/٤

د) صفراء = صفر حدث مستحيل

هـ) ليست صفراء = ١٢/١٢ = ١ حدث مؤكد

مثال ② سحبت بطاقة عشوائياً من ٢٠ بطاقة مرقمة من ١ الى ٢٠ احسب إحتمال أن تكون البطاقة المختارة تحمل عدداً:

أ) يقبل القسمة على ٣ = ٦/٢٠ = ٣/١٠

= {٣، ٦، ٩، ١٢، ١٥، ١٨}

ب) يقبل القسمة على ٥ = ٤/٢٠ = ١/٥

{٥، ١٠، ١٥، ٢٠}

جـ) يقبل القسمة على ٣ ويقبل القسمة على ٥

نأخذ التقاطع {١٥}

الإحتمال = ١/٢٠

د) يقبل القسمة على ٣ أو يقبل القسمة ٥

نأخذ الإتحاد = {٣، ٦، ٩، ١٢، ١٥، ١٨، ٥، ١٠، ٢٠}

الإحتمال = ٩/٢٠ = ٠٫٤٥

ملاحظات هامة :-

١) إذا كان أ، ب حدثان متنافيان فإن أ ∩ ب = ϕ ، ل(أ ∩ ب) = صفر

٢) إذا كان أ ⊂ ب فإن

ل(أ) = ل(أ ∩ ب)

ل(ب) = ل(أ ∪ ب)

⊂ ← جزئية من

∩ ← تقاطع   ∪ ← إتحاد

العمليات على الأحداث :-

١) إحتمال وقوع أ و ب معاً

ل(أ ∩ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∪ ب)

٢) إحتمال وقوع أ أو ب أو كلاهما

← إحتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل

← إحتمال وقوع أى من الحدثين

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

٣) الفرق بين حدثين

← إحتمال وقوع الحدث أ وعدم وقوع ب

← إحتمال وقوع الحدث أ فقط

ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب)

٤ الحدث المكمل أَ

ل(أَ) = ١ − ل(أ)

ل(أ) + ل(أ)َ = ١

ل(أ ∩ أَ) = صفر

← إذا كان ل(أ) = ل(أ)َ فإن

ل(أ) = ١/٢ ، ل(أ)َ = ١/٢

٥ احتمال عدم وقوع أ و ب معاً

ل(أ ∩ ب)َ = ١ − ل(أ ∩ ب)

٦ احتمال عدم وقوع أي من الحدثين

ل(أ ∪ ب)َ = ١ − ل(أ ∪ ب)

٧ احتمال وقوع أحد الحدثين دون الآخر

← احتمال وقوع أحد الحدثين فقط

= ل(أ − ب) + ل(ب − أ)

٨ ل(ف) = ١

٩ ل(φ) = صفر

مثال ٣ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة وكان ل(ب) = ١/١٢ ، ل(أ) = ٥/١٢ ، ل(أ ∪ ب) = ١/٣ أوجد

١ ل(أ ∩ ب) ٢ ل(أ − ب)

٣ ل(أ)َ ٤ ل(أ ∪ ب)َ

الحل

١ ل(أ ∩ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∪ ب)

= ١/١٢ + ٥/١٢ − ١/٣ = ١/٦

٢ ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب)

= ٥/١٢ − ١/٦ = ١/٤

٣ ل(أ)َ = ١ − ل(أ) = ١ − ٥/١٢ = ٧/١٢

٤ ل(أ ∪ ب)َ = ١ − ل(أ ∪ ب) = ١ − ١/٣

= ٢/٣

مثال ٤ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة وكان ل(ب) = ٠٫٣ ، ل(أ ∪ ب) = ٠٫٧ أوجد ل(أ) إذا كان

أ أ ، ب حدثان متنافيان ب ب ⊂ أ

الحل أ أ ، ب حدثان متنافيان

فإن ل(أ ∩ ب) = صفر

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

٠٫٧ = ل(أ) + ٠٫٣ − صفر

ل(أ) = ٠٫٧ − ٠٫٣ = ٠٫٤

ب ب ⊂ أ

فإن ل(أ ∪ ب) = ل(أ)

∴ ل(أ) = ٠٫٧

مثال ٥ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان ل(أ) = ٠٫٨ ، ل(ب) = ٠٫٧ ، ل(أ ∩ ب) = ٠٫٦ فأوجد

أ احتمال عدم وقوع الحدث أ

ل(أ)َ = ١ − ل(أ) = ١ − ٠٫٨ = ٠٫٢

ب احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

= ٠٫٨ + ٠٫٧ − ٠٫٦ = ٠٫٩

جـ احتمال وقوع أحد الحدثين دون الآخر

= ل(أ − ب) + ل(ب − أ)

= ل(أ) − ل(أ ∩ ب) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

= ٠٫٨ − ٠٫٦ + ٠٫٧ − ٠٫٦ = ٠٫٣

د احتمال وقوع ب فقط

ل(ب − أ) = ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

= ٠٫٧ − ٠٫٦ = ٠٫١

هـ احتمال عدم وقوع أي من الحدثين

ل(أ ∪ ب)َ = ١ − ل(أ ∪ ب) = ١ − ٠٫٩ = ٠٫١

تمارين (٦)

[١] أكمل ما يأتي

[١] إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين فإن ل(أ ∩ ب) = ...

[٢] إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين فإن أ ∩ ب = ...

[٣] إذا كانت أ ⊂ ب فإن ل(أ ∪ ب) = ...

[٤] إذا ألقيت قطعة نقود منتظمة مرة واحدة فإن احتمال ظهور صورة أو كتابة يساوي ......

[٥] إذا ألقيت قطعة نقود مرة واحدة فإن احتمال ظهور صورة ......
واحتمال ظهور كتابة ......
احتمال ظهور صورة وكتابة ......

[٦] إذا ألقي حجر نرد مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد زوجي وعدد فردي معاً يساوي ......

[٧] إذا كان احتمال وقوع أ هو ٦٥٪ فإن احتمال وقوع أ' هو ......

[٨] إذا كان ل(أ) = ل(أ') فإن ل(أ) = ...

[٩] إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين وكان ل(أ) = $\frac{1}{3}$ ، ل(أ ∪ ب) = $\frac{7}{12}$ فإن ل(ب) = ...

[١٠] إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة وكان ل(أ) = ٠.٧ ، ل(أ − ب) = ٠.٥ فإن ل(أ ∩ ب) = ...

[١١] إذا كان أ' هو الحدث المكمل للحدث أ فإن أ' ∪ أ = ... ، أ ∩ أ' = ...

[١٢] احتمال الحدث المستحيل = ...

[١٣] احتمال الحدث المؤكد = ...

[١٤] إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين وكان ل(أ) = ٠.٢ ، ل(ب) = ٠.٣ فإن ل(أ ∪ ب) = ...

[١٥] عند إلقاء حجر نرد منتظم مرة فإن احتمال ظهور عدد زوجي = ...

[١٦] إذا كان احتمال نجاح طالب $\frac{11}{15}$ فإن احتمال رسوبه ......

[١٧] عند إلقاء حجر نرد فإن احتمال ظهور عدد أقل من ٤ يساوي ......

[٢] تسع بطاقات متماثلة مرقمة من ١ إلى ٩ سحبت منها بطاقة واحدة عشوائياً

[١] اكتب فضاء العينة

[٢] احسب الاحتمالات الآتية

[أ] أن تحمل البطاقة المسحوبة عدداً زوجياً

[ب] أن تحمل البطاقة المسحوبة عدداً يقبل القسمة على ٣

[جـ] أن تحمل عدداً أولياً أكبر من ٥

[٣] إذا كان ل(أ) = $\frac{3}{8}$ ، ل(ب) = $\frac{1}{2}$ ، ل(أ ∪ ب) = $\frac{5}{8}$

فأوجد ① ل(أ ∩ ب) ② ل(أ − ب)

③ ل(أ') ④ ل(ب − أ)

⑤ ل(أ ∪ ب)' [٦] ل(ب)'

[٤] إذا كان ل(أ) = ٠.٧ ، ل(ب) = ٠.٦ ، ل(أ ∩ ب) = ٠.٤

فأوجد [١] احسب احتمال أ و ب معاً

[٢] احسب احتمال وقوع أ أو ب

[٣] احسب احتمال وقوع أ وعدم وقوع ب

[٤] احتمال عدم وقوع الحدث ب

[٥] احتمال عدم وقوع أي من الحدثين

[٦] احتمال وقوع أحد الحدثين فقط

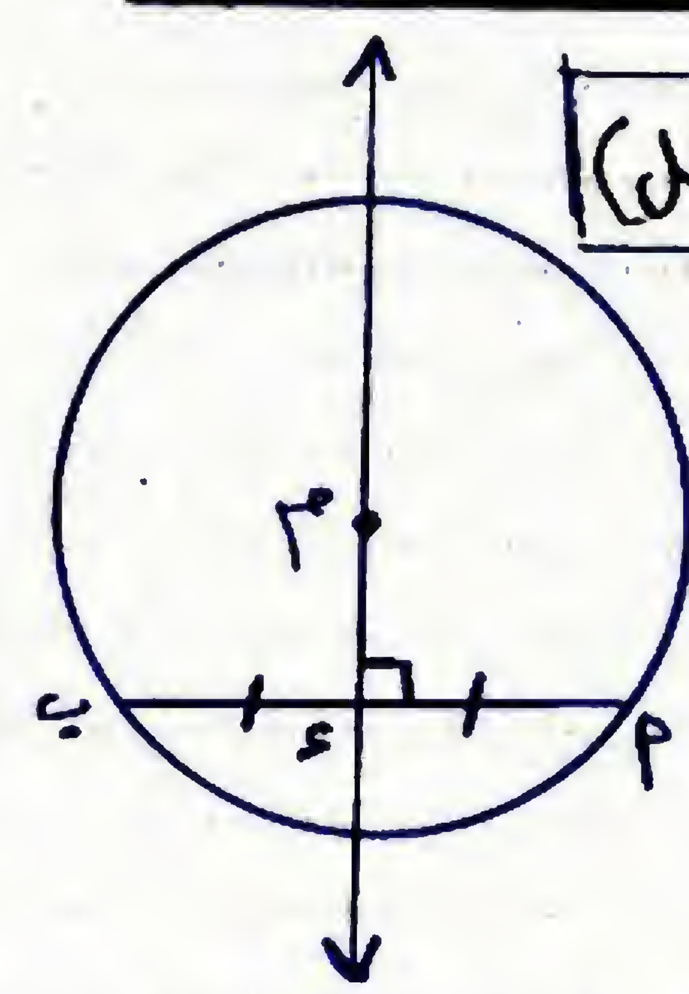
[٥] كيس به ١٥ كرة متماثلة مرقمة من ١ إلى ١٥ سحبت منه كرة عشوائياً. إذا كان الحدث أ هو الحصول على عدد فردي ، ب حدث الحصول على عدد أولي أوجد :

ل(أ) ، ل(ب) ، ل(أ − ب) ، ل(أ ∩ ب)

ل(أ ∪ ب)

[الهندسة]

الوحدة الرابعة (الدائرة)



مار بالمركز (محور تماثل)

ينصف القاعدة

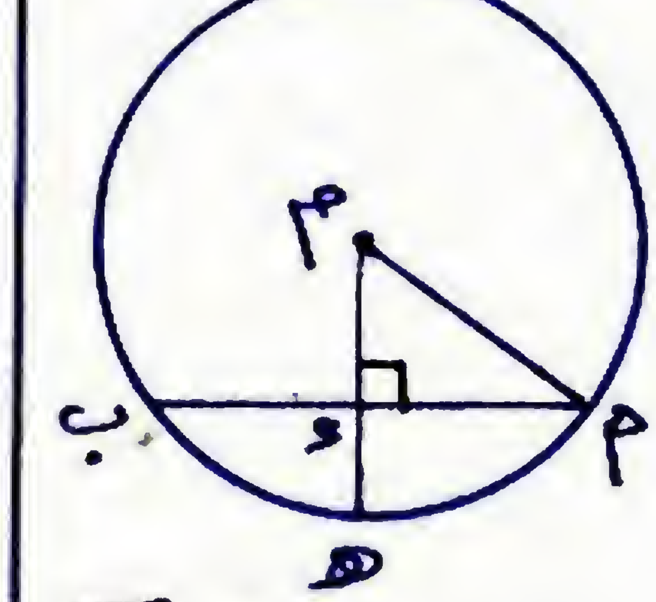
عمودي على القاعدة

(1) المستقيم المار بمركز الدائرة وبمنتصف أي وتر فيها يكون عمودي على هذا الوتر

(2) المستقيم المار بمركز الدائرة وعموديا على أي وتر فيها ينصف هذا الوتر

(3) المستقيم العمودي على وتر الدائرة من منتصفه يكون محور تماثل لها (مار بالمركز)

مثال (1) في الشكل المقابل



دائرة م نصف قطرها ٥ سم

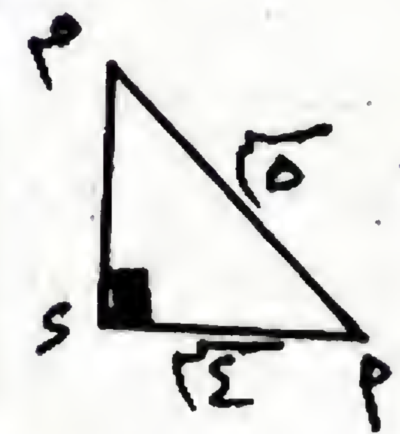
م د ⊥ أب ، أب = ٨ سم

أوجد طول د هـ

البرهان ∵ م د ⊥ أب ∴ د منتصف أب

∴ أ د = د ب = ٨/٢ = ٤ سم

∵ م أ = م هـ = نق = ٥ سم



في △ م د أ القائم في د

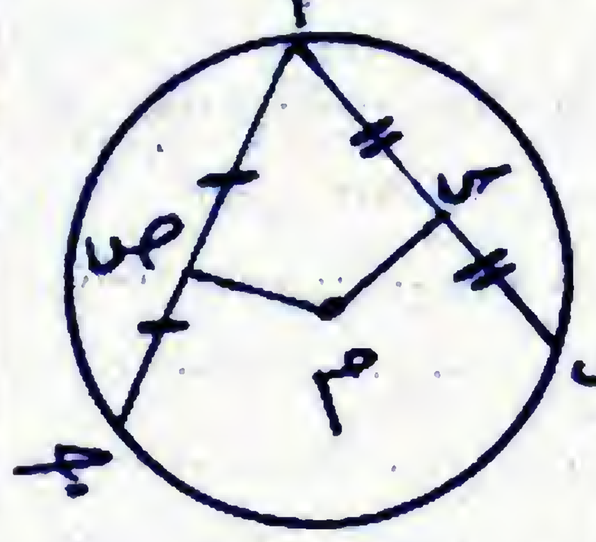
من نظرية فيثاغورث

م د = √(٢٥ − ١٦) = √٩ = ٣ سم

∴ د هـ = ٥ − ٣ = ٢ سم #

أكتب البرهان بأسلوبك الخاص ولكن أكتبه بالتفصيل وأكتب السبب ولا تختصر

مثال (2) في الشكل المقابل



ق(∠أ) = ٤٣° ، س منتصف أب

ص منتصف أجـ أوجد

ق(∠س م ص)

البرهان

∵ س منتصف أب ∴ ق(∠س) = ٩٠°

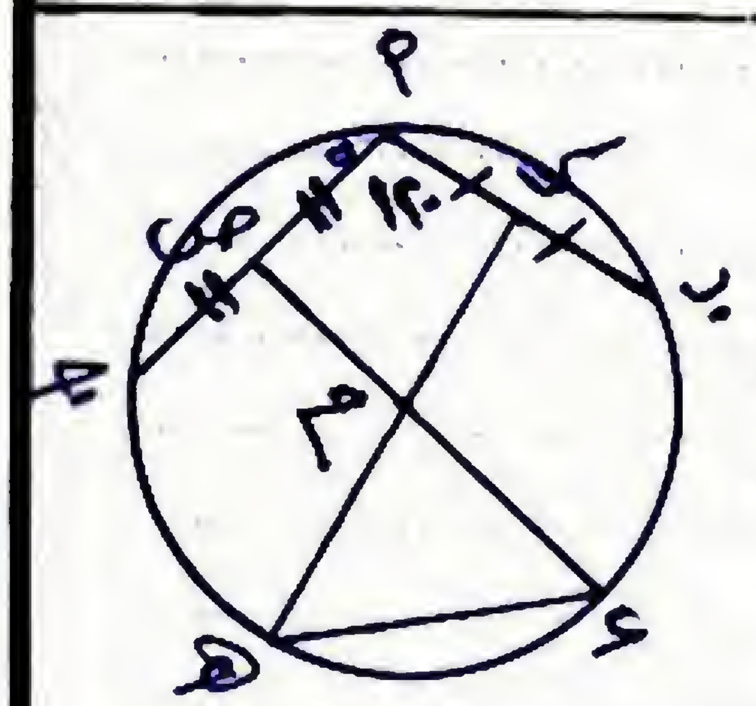
∵ ص منتصف أجـ ∴ ق(∠ص) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°

∴ ق(∠ص م س) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ٤٣°)

= ٣٦٠° − ٢٢٣° = ١٣٧° #

مثال (3) دائرة مركزها م



ق(∠أ) = ١٢٠° ، س منتصف أب

ص منتصف أجـ أثبت أن

△ م د هـ متساوي الأضلاع

البرهان ∵ س منتصف أب ∴ ق(∠س) = ٩٠°

∵ ص منتصف أجـ ∴ ق(∠ص) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°

∴ ق(∠س م ص) = ٣٦٠ − (٩٠ + ٩٠ + ١٢٠) = ٦٠°

∴ ق(∠د م هـ) = ق(∠س م ص) = ٦٠° بالتقابل بالرأس

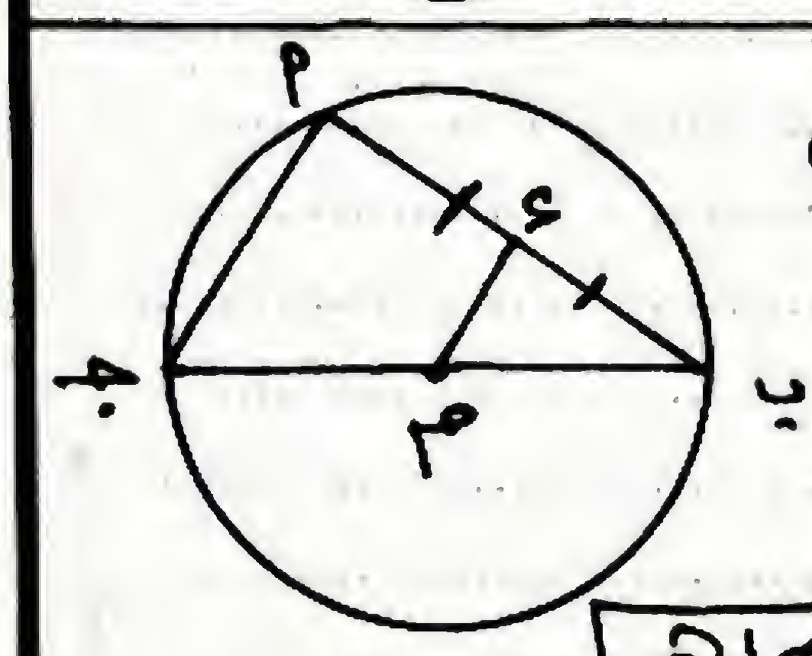
∵ م د = م هـ = نق

∴ ق(∠د) = ق(∠هـ) = (١٨٠ − ٦٠)/٢ = ٦٠°

∴ ق(∠د) = ق(∠هـ) = ق(∠د م هـ) = ٦٠°

∴ △ م د هـ متساوي الأضلاع

مثال (4) في الشكل المقابل



دائرة مركزها م ، د منتصف أب

(1) أثبت أن م د // أجـ

(2) أوجد ق(∠أ)

البرهان

∵ د منتصف أب ، ∵ م منتصف بجـ

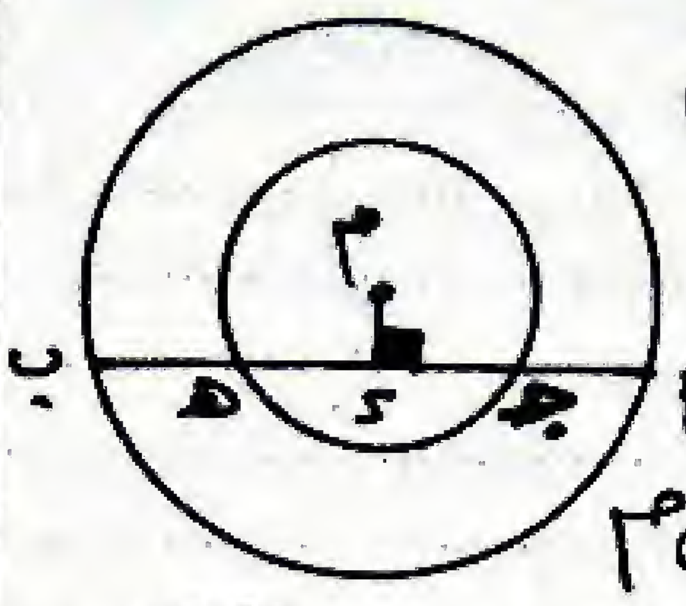
∴ م د // أجـ ، م د = ½ أجـ نظرية (1) #

∵ د منتصف أب ∴ ق(∠د) = ٩٠°

∴ ق(∠أ) = ق(∠د) = ٩٠° بالتناظر (حرف F)

(2) #

مثال (5) في الشكل المقابل



$\overline{مد} \perp \overline{أب}$ إثبت أن

$\boxed{أجـ = هـ ب}$

البرهان في الدائرة الصغرى م

∵ $\overline{مد} \perp \overline{جـ هـ}$ ∴ د منتصف $\overline{جـ هـ}$

∴ جـ د = د هـ ← (1)

في الدائرة الكبرى م

∵ $\overline{مد} \perp \overline{أب}$ ∴ د منتصف $\overline{أب}$

∴ أ د = د ب ← (2)

بطرح (1) من (2) ينتج أن

أجـ = هـ ب #

مثال (6) د، هـ منتصفا $\overline{أب}$، $\overline{أجـ}$ على الترتيب، ق(∠أ) = 45°

إثبت أن Δ م هـ و متساوي الساقين

البرهان ∵ د منتصف $\overline{أب}$ ∴ ق(∠د) = 90°

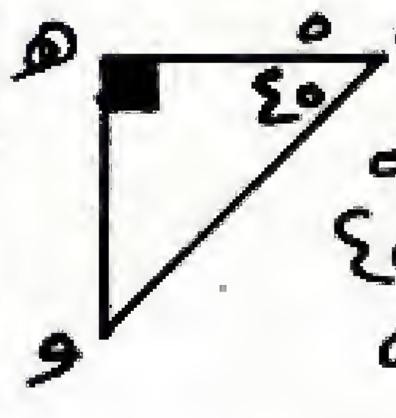
∵ هـ منتصف $\overline{أجـ}$ ∴ ق(∠هـ) = 90°

∴ ق(∠د م هـ) = 360° − (90° + 90° + 45°)

= 135°

∴ ق(∠هـ م و) المكملة = 180 − 135 = 45°

في Δ م هـ و القائم في هـ

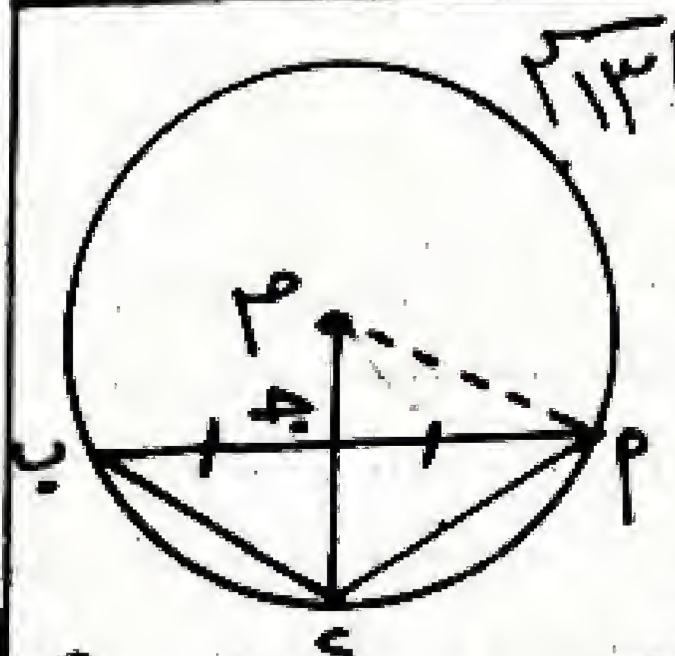


ق(∠و) = 180 − (45 + 90) = 45°

∴ ق(∠م) = ق(∠و) = 45°

∴ Δ م هـ و متساوي الساقين

مثال (7) دائرة م نصف قطرها 13 سم



أ ب = 24 سم، جـ منتصف $\overline{أب}$

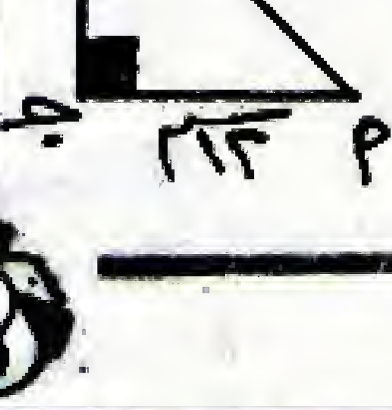
أوجد مساحة Δ أ د ب

العمل نرسم $\overline{م أ}$ نصف قطر

البرهان ∵ جـ منتصف $\overline{أب}$ ∴ ق(∠جـ) = 90°

∴ أ جـ = جـ ب = 12 سم

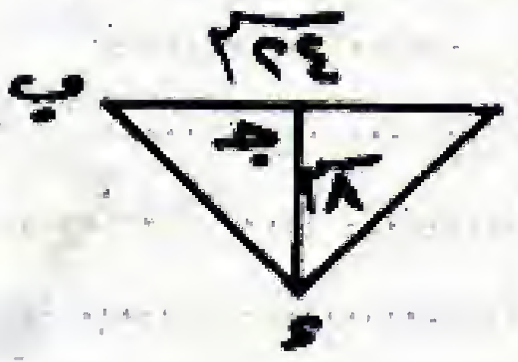
في Δ م جـ أ القائم في جـ



م جـ = $\sqrt{(13)^2 - (12)^2}$ = 5 سم

∵ م د = نق = 13 سم ∴ جـ د = 13 − 5 = 8 سم

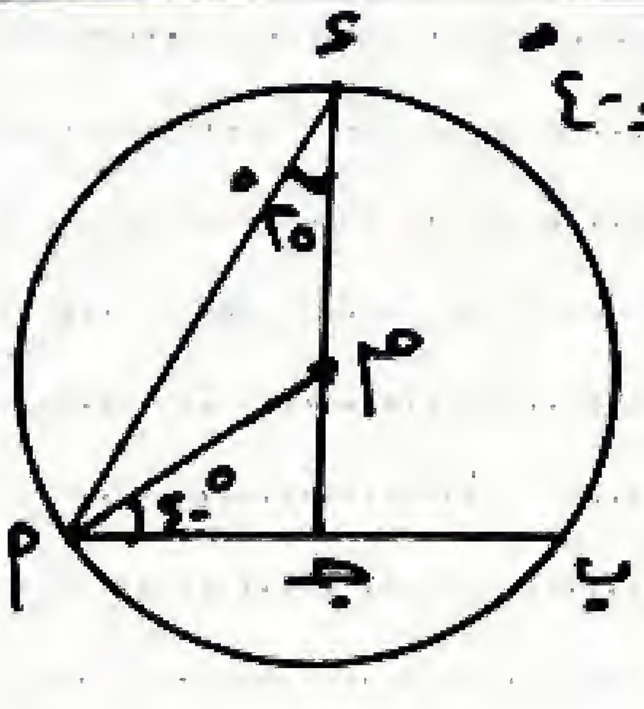
في Δ أ د ب



مساحة Δ = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة × الارتفاع

= 12 × 8 = 96 سم²

مثال (8) ق(∠د) = 25°، ق(∠م أ جـ) = 40°



برهن أن جـ منتصف $\overline{أب}$

البرهان في Δ م د أ

∵ م د = م أ = نق

∴ ق(∠د) = ق(∠م أ د) = 25°

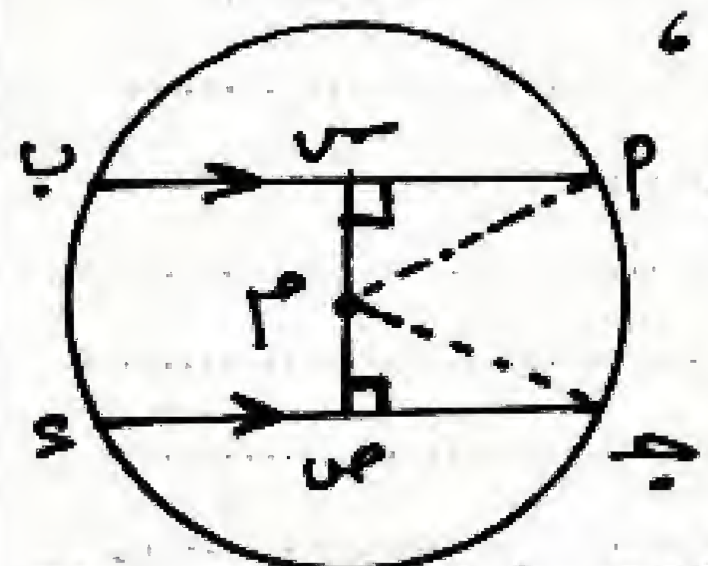
∴ ق(∠جـ أ د) = 40° + 25° = 65°

في Δ د جـ أ ∵ مجموع قياسات زوايا Δ = 180°

∴ ق(∠جـ) = 180° − (65 + 25) = 90°

∴ $\overline{مجـ} \perp \overline{بأ}$ ∴ جـ منتصف $\overline{أب}$ #

مثال (9) $\overline{أب} \parallel \overline{جـ د}$، أ ب = 12 سم،

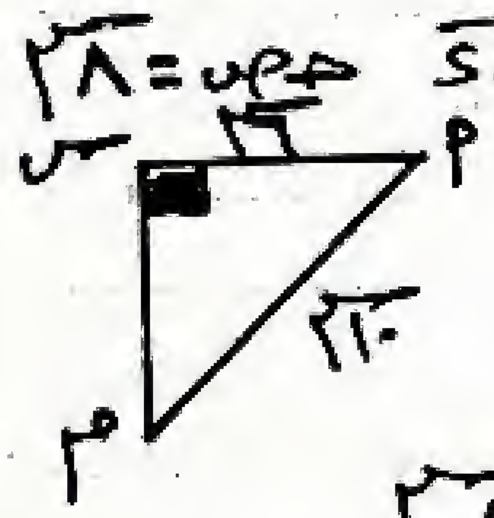


جـ د = 16 سم أوجد البعد بين الوترين $\overline{أب}$، $\overline{جـ د}$ إذا كان طول نصف قطر الدائرة م = 10 سم

العمل نرسم $\overline{س ص}$ حيث $\overline{م س} \perp \overline{أب}$، $\overline{م ص} \perp \overline{جـ د}$

∵ $\overline{م س} \perp \overline{أب}$ ∴ س منتصف $\overline{أب}$ أ س = 6 سم

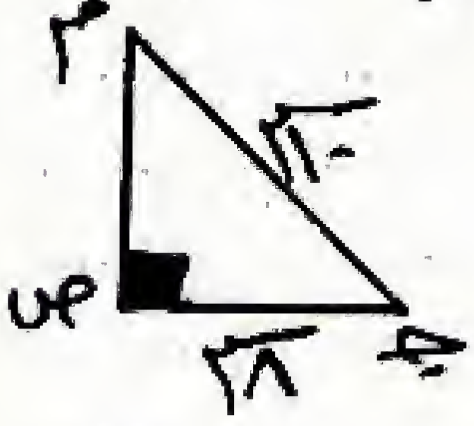
∵ $\overline{م ص} \perp \overline{جـ د}$ ∴ ص منتصف $\overline{جـ د}$ جـ ص = 8 سم



في Δ أ س م القائم في س

من نظرية فيثاغورث

م س = $\sqrt{100 - 36} = \sqrt{64}$ = 8 سم



في Δ م جـ ص القائم في ص

من نظرية فيثاغورث

م ص = $\sqrt{100 - 64} = \sqrt{36}$ = 6 سم

∴ س ص = م س + م ص = 8 + 6 = 14 سم

#

[رب اشرح لي صدري ويسر لي أمري]

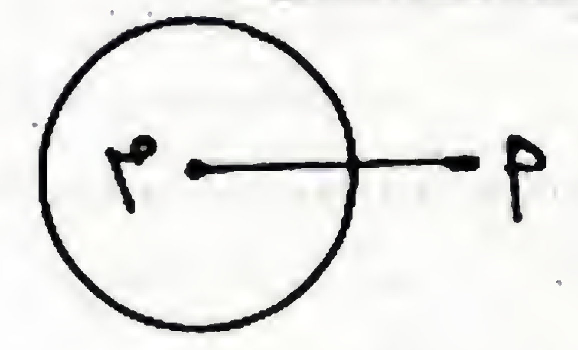
[اللهم لا سهل إلا ما جعلته سهلاً]

الدرس الثاني

موضع نقطة ومستقيم بالنسبة لدائرة

* موضع نقطة بالنسبة لدائرة

(1) أ خارج الدائرة

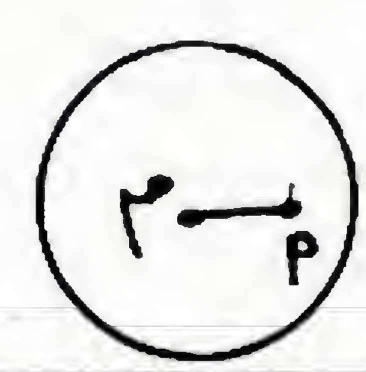


يكون م أ > نق

(2) أ على الدائرة

يكون م أ = نق

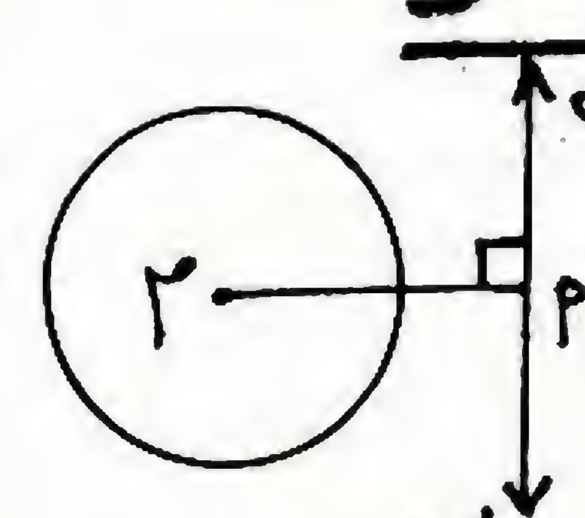
(3) أ داخل الدائرة



يكون م أ < نق

* موضع مستقيم بالنسبة لدائرة :-

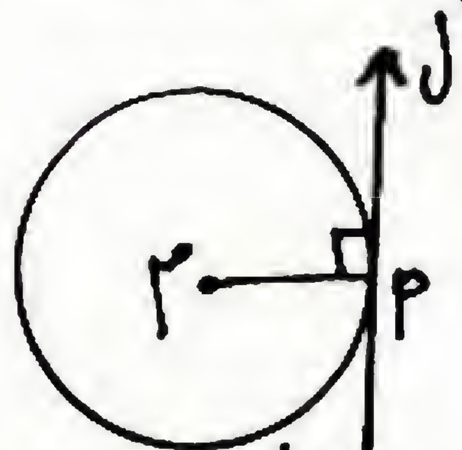
(1) خارج الدائرة



م أ > نق

ل ∩ الدائرة م = ∅

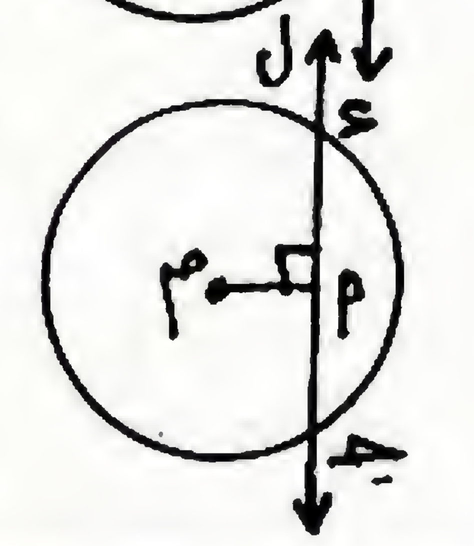
(2) مماس للدائرة



م أ = نق

ل ∩ الدائرة م = {أ}

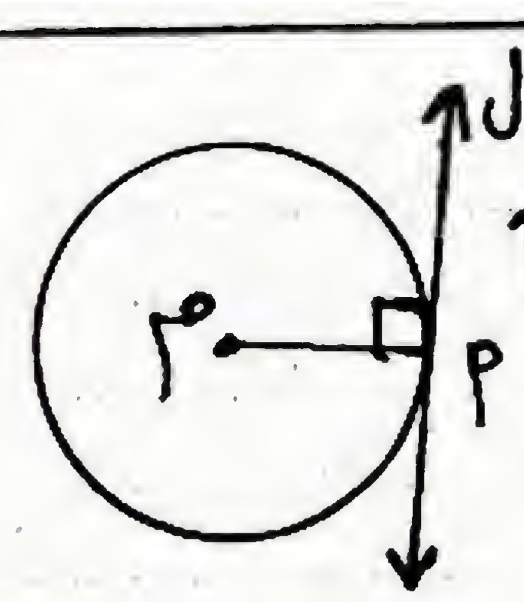
(3) قاطع للدائرة



م أ < نق

ل ∩ الدائرة م = {ء ، جـ}

نتيجة (1)



(المماس للدائرة يكون عمودياً على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس)

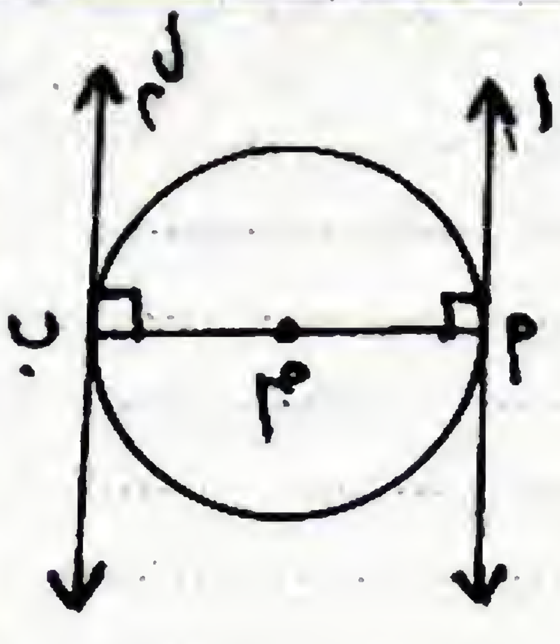
∵ ل مماس للدائرة عند أ ، م أ نصف قطر

∴ ق(∠أ) = 90°

نتيجة (2)

المستقيم العمودي على قطر الدائرة من إحدى نهايتيه يكون مماساً للدائرة

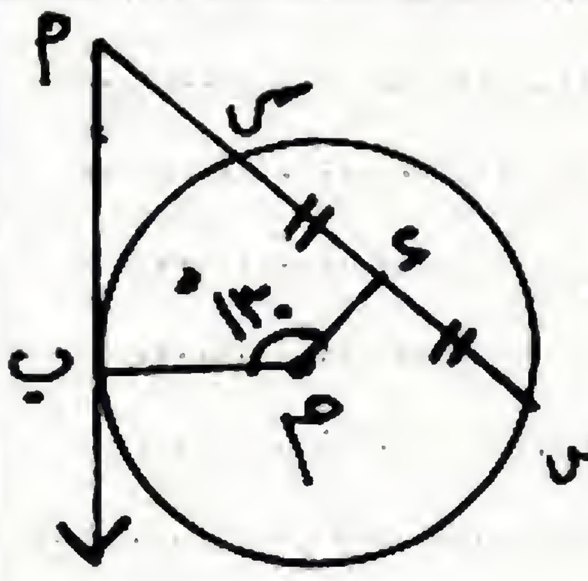
نتيجة (3)



(المماسان للدائرة المرسومان من نهايتي قطر فيها يكونان متوازيان)

أي أن ل١ // ل٢

مثال (1) في الشكل المقابل



أب مماس للدائرة م عند ب ، ء منتصف س ص ، ق(∠ء م ب) = 130°

أوجد ق(∠أ)

البرهان

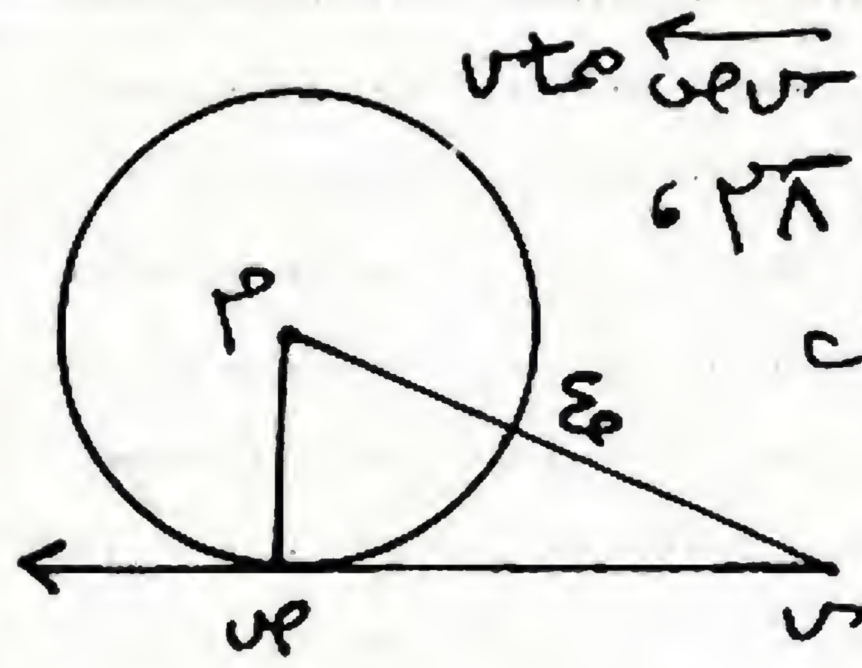
∵ ء منتصف س ص

∴ ق(∠ء) = 90°

∵ أب مماس ، م ب نصف قطر ∴ ق(∠ب) = 90°

∴ ق(∠أ) = $360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 130^\circ) = 50^\circ$ #

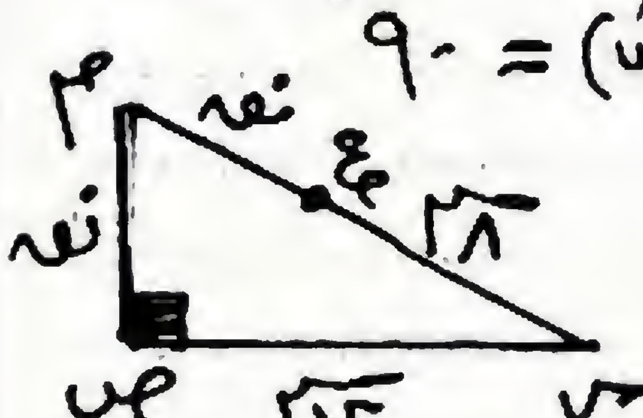
مثال (2) في الشكل المقابل س ص مماس للدائرة عند ص ، ع ∈ م س ، س ع = 8 ، س ص = 12 أحسب طول نصف قطر الدائرة م



البرهان

∵ س ص مماس ∴ ق(∠ص) = 90°

في Δ س ص م القائم في ص



باستخدام نظرية فيثاغورث

(س م)² = (ص س)² + (م ص)²

(8 + نق)² = (12)² + (نق)²

64 + نق² + 16 نق = 144 + نق²

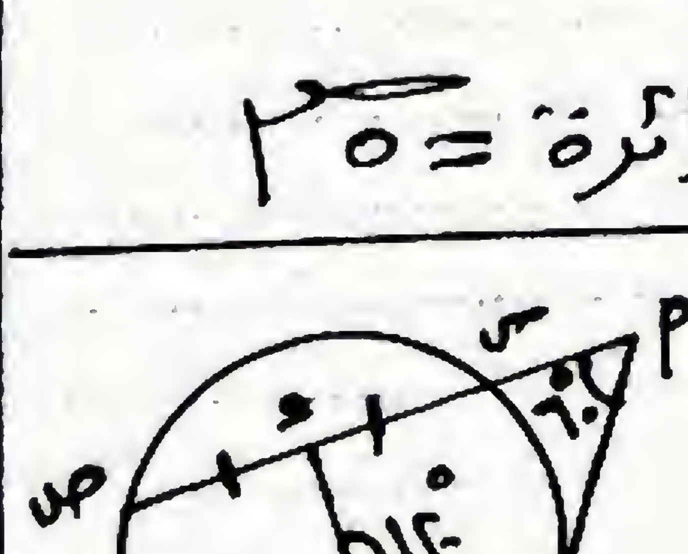
16 نق = 144 − 64

16 نق / 16 = 80 / 16

∴ نق = 5 سم

∴ طول نصف قطر الدائرة = 5 سم

مثال (3) ء منتصف س ص



ق(∠أ) = 60° ، ق(∠م) = 120°

أثبت أن أب مماس للدائرة م عند نقطة ب

البرهان ∵ ع منتصف $\overline{سص}$ ∴ ق(∠ع) = ٩٠°

∴ ق(∠ي) = ٣٦٠° − (٦٠° + ١٢٠° + ٩٠°)

= ٩٠° = زاوية قائمة

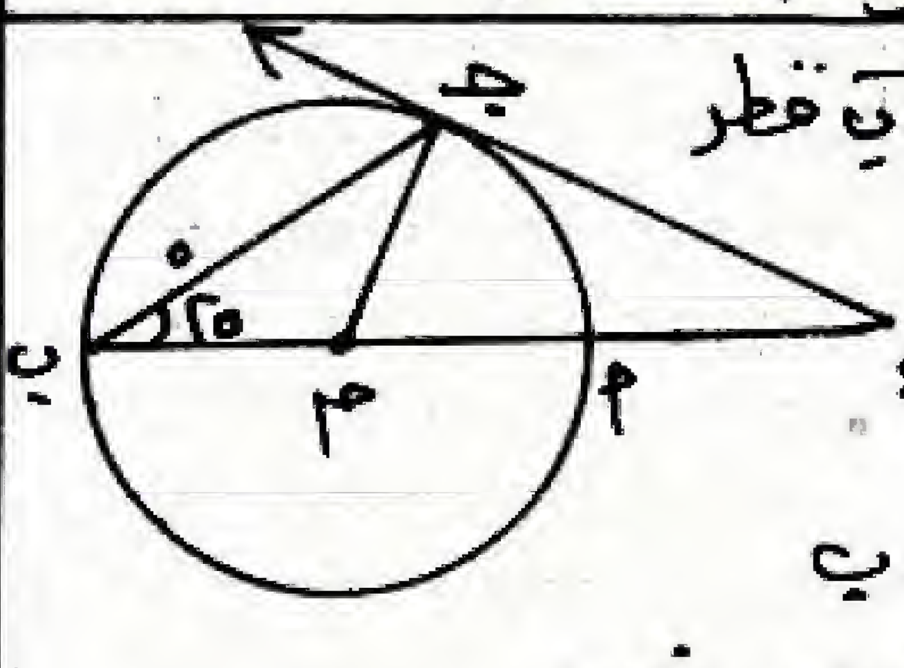
∴ $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ $\overline{بم}$ عند نقطه ب

∴ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م عند ب

مثال ٤ $\overleftrightarrow{دجـ}$ مماس ، $\overline{أب}$ قطر

ق(∠ب) = ٢٥° أوجد

ق(∠د)



البرهان في ∆ م جـ ب

∵ م جـ = م ب = نق

∴ ق(∠م جـ ب) = ق(∠ب) = ٢٥°

∵ $\overleftrightarrow{دجـ}$ مماس ، $\overline{مجـ}$ نصف قطر

∴ ق(∠د جـ م) = ٩٠°

∴ ق(∠د جـ ب) = ٩٠° + ٢٥° = ١١٥°

في ∆ د جـ ب

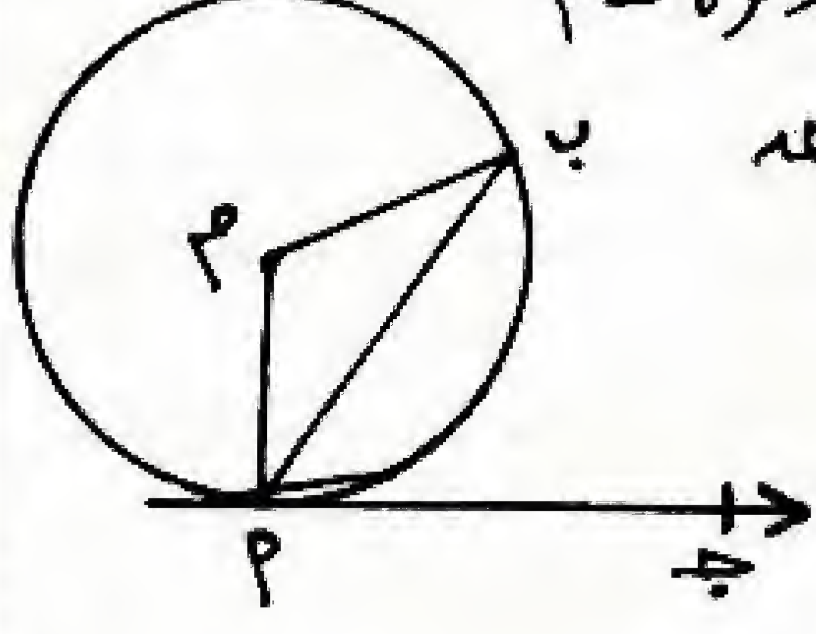
ق(∠د) = ١٨٠° − (١١٥° + ٢٥°) = ١٨٠ − ١٤٠

= ٤٠° #

مثال ٥ $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماس للدائرة عند أ

ق(∠أ ب م) = ٤٠° أوجد

ق(∠ب أ جـ)



البرهان

في ∆ م ب أ

∵ م ب = م أ = نق

∴ ق(∠ب أ م) = ق(∠أ ب م) = ٤٠°

∵ $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماس ، $\overline{أم}$ نصف قطر

∴ ق(∠جـ أ م) = ٩٠°

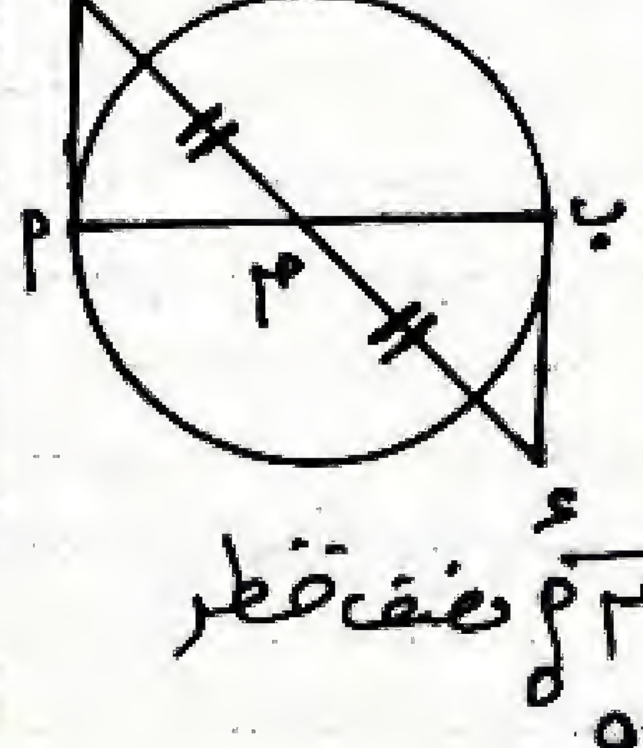
∴ ق(∠ب أ جـ) = ٩٠° − ٤٠° = ٥٠°

مثال ٦ في الشكل المقابل

$\overleftrightarrow{أجـ}$ مماس للدائرة عند أ

جـ م = م د أثبت أن

$\overleftrightarrow{بد}$ مماس للدائرة م عند ب



البرهان ∵ $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماس ، $\overline{مأ}$ نصف قطر

∴ ق(∠أ) = ٩٠°

∆∆ م ب د ، م أ جـ

فيهما:
- م د = م جـ معطى
- م ب = م أ = نق
- ق(∠د م ب) = ق(∠جـ م أ) بالتقابل بالرأس

∴ ∆ د ب م ≡ ∆ جـ أ م وينتج أن

ق(∠أ) = ق(∠ب) = ٩٠°

∴ $\overline{بد}$ ⊥ $\overline{مب}$ ∴ $\overleftrightarrow{بد}$ مماس

للدائرة م عند ب

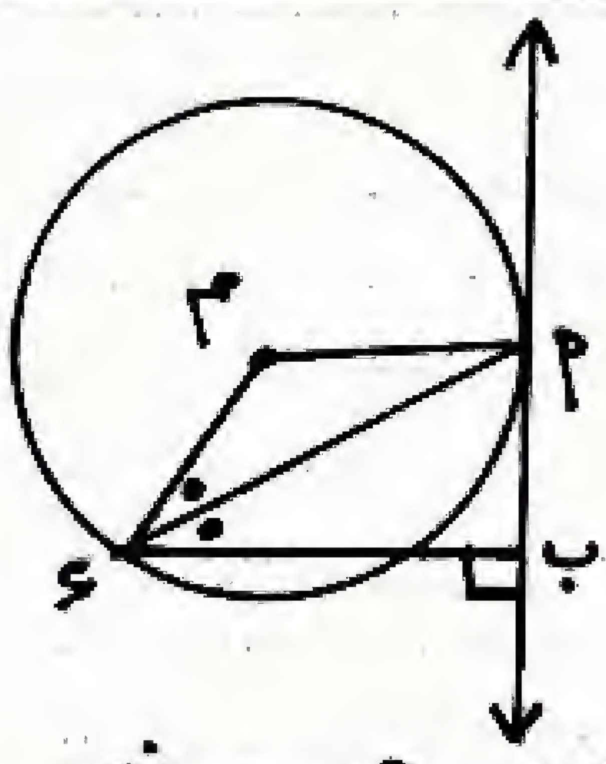
مثال ٧ في الشكل المقابل

ق(∠م د أ) = ق(∠أ د ب)

$\overline{دب}$ ⊥ $\overleftrightarrow{أب}$ إثبت أن

$\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م

عند أ



البرهان في ∆ م أ د ∵ م أ = م د = نق

∴ ق(∠م أ د) = ق(∠م د أ) ← ①

∵ ق(∠م د أ) = ق(∠أ د ب) ← معطى ②

من ① ، ② ينتج أن

ق(∠م أ د) = ق(∠أ د ب) وهما في

وضع تبادل

∴ $\overline{أم}$ // $\overline{بد}$

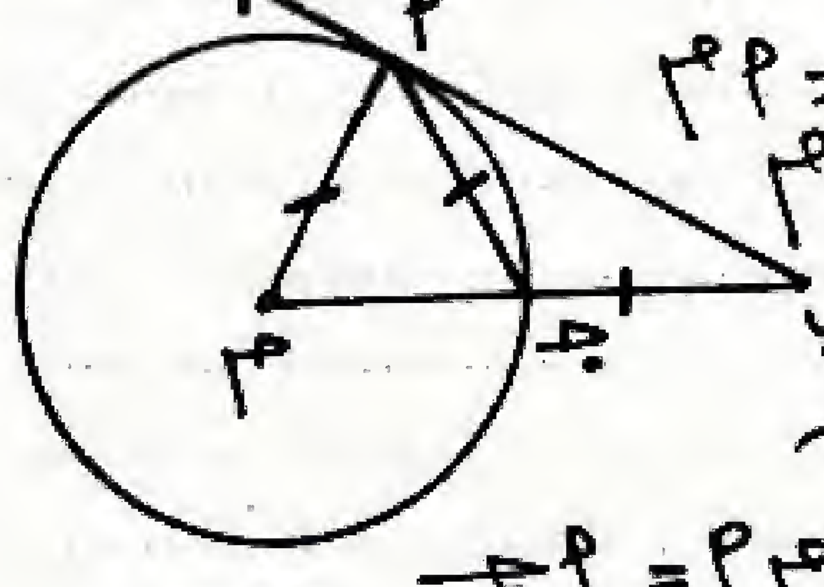
∴ ق(∠ب أ م) = ق(∠ب) = ٩٠° بالتناظر

∴ $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ $\overline{أم}$ من عند أ

∴ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م عند أ

مثال ٨ ب جـ = جـ م = أ م

إثبت أن $\overleftrightarrow{بأ}$ مماس للدائرة م



البرهان

∵ م أ = م جـ = نق

∴ ب جـ = جـ م = م أ = أ جـ

∴ أ جـ = ½ ب م

∴ $\overline{أجـ}$ خارج من زاوية قائمة

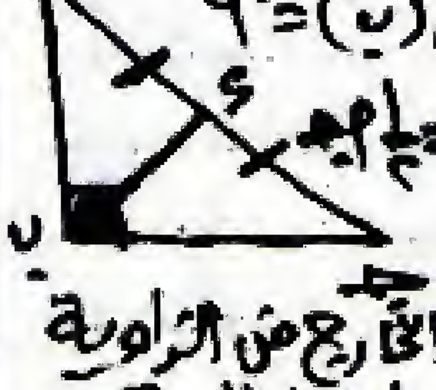
∴ ق(∠أ) قائمة ∴ $\overline{بأ}$ ⊥ $\overline{أم}$

∴ $\overleftrightarrow{بأ}$ مماس للدائرة م عند أ

#

تذكر

ق(∠ب) = ٩٠°

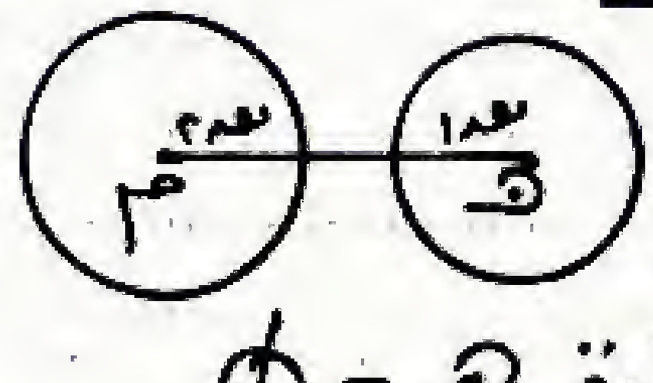


المتوسط الخارج من الزاوية القائمة = ½ طول الوتر

الدرس الثالث

موضع دائرة بالنسبة لدائرة

(1) الدائرتان المتباعدتان :-

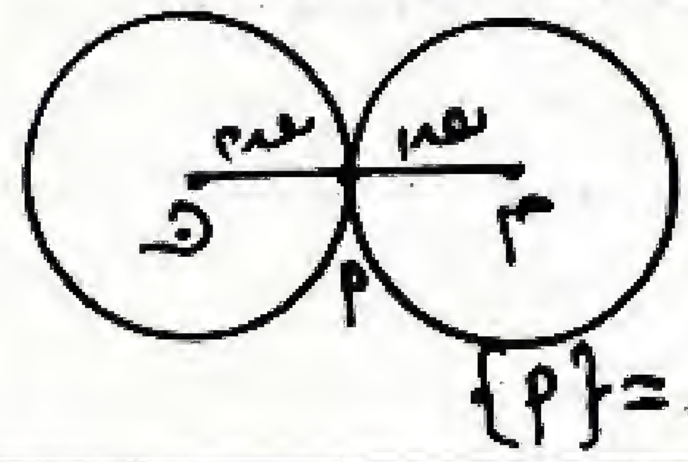


$\boxed{\text{م ن > نق١ − نق٢}}$

الدائرة م ∩ الدائرة ن = ϕ

سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = ϕ

(2) الدائرتان المتماستان من الخارج :

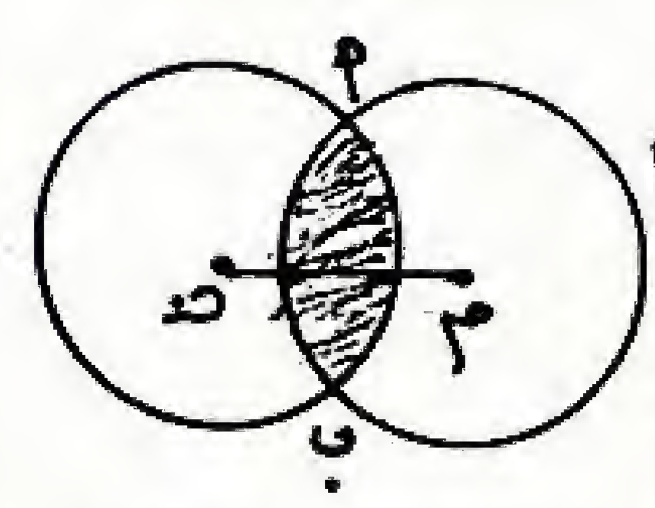


$\boxed{\text{م ن = نق١ + نق٢}}$

الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ}

سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = {أ}

(3) متقاطعتان :



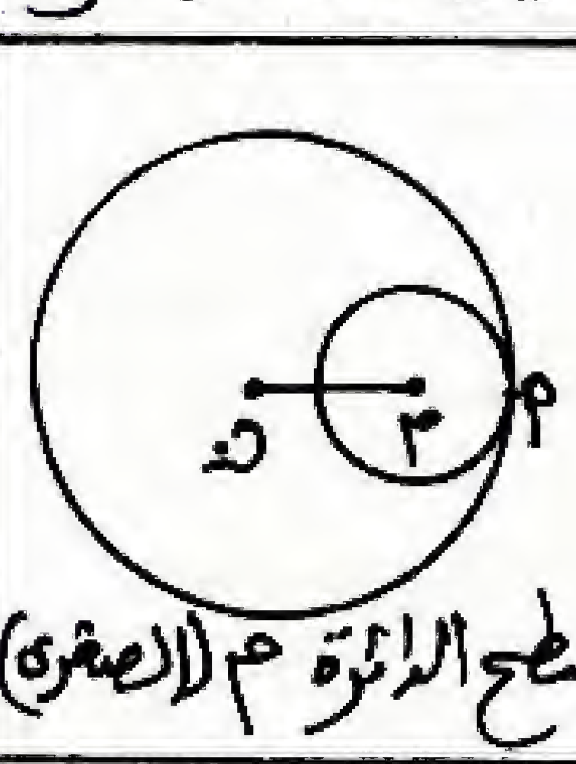
$\boxed{\text{نق١ − نق٢ < م ن < نق١ + نق٢}}$

الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ ، ب}

سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = المنطقة المظللة

← أى دائرتين تتقاطعان فى نقطتين على الأكثر

(4) متماستان من الداخل :



$\boxed{\text{م ن = نق١ − نق٢}}$

الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ}

سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة م (الصغرى)

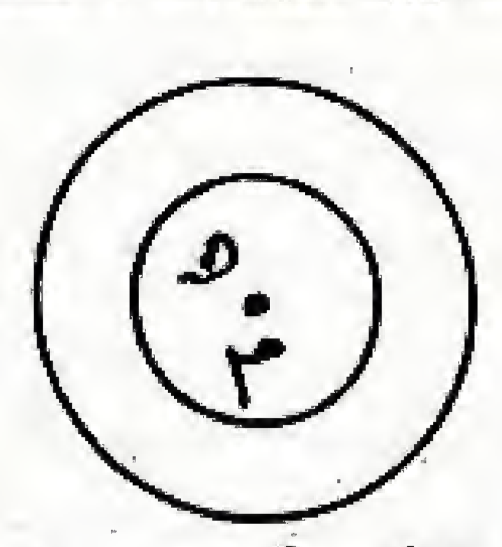
(5) متداخلتان

$\boxed{\text{م ن < نق١ − نق٢}}$

الدائرة م ∩ الدائرة ن = ϕ

سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن (الصغرى)

(6) متحدتى المركز

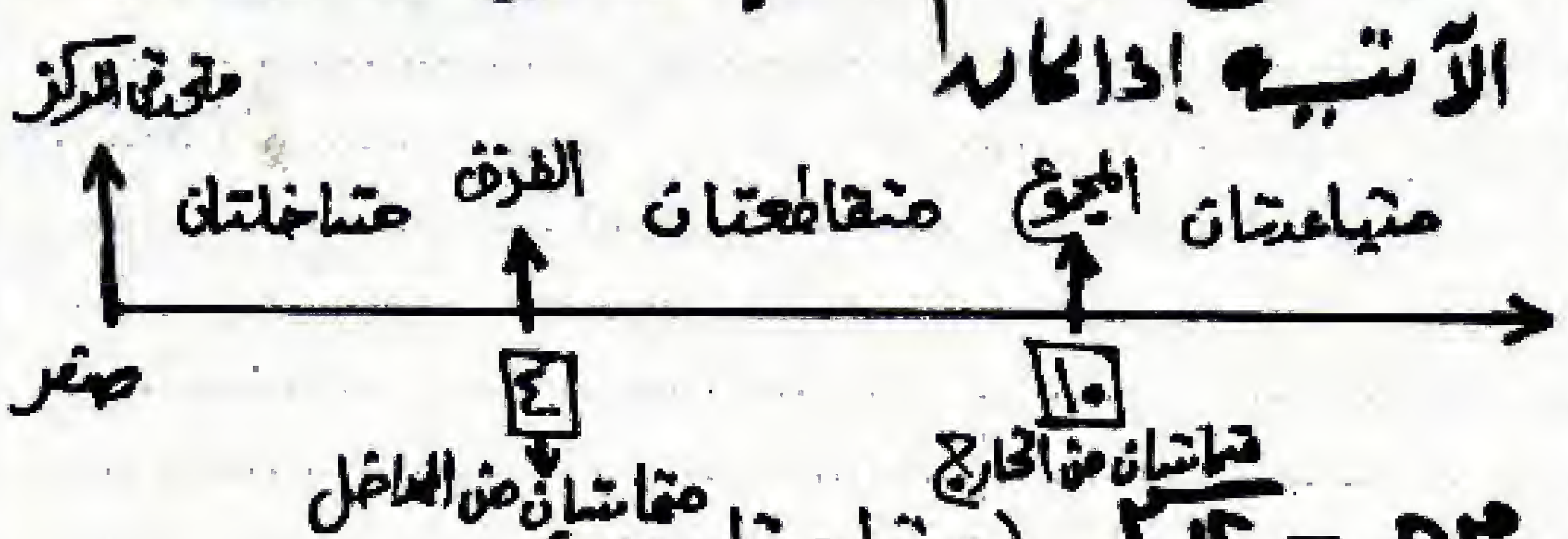


$\boxed{\text{م ن = صفر}}$

الدائرة م ∩ الدائرة ن = ϕ

سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = الدائرة الصغرى ن (الصغرى)

م ، ن دائرتان نصف قطر كلاً منهم ٧ سم ، ٣ سم أوجد وضع كلاً منهم بالنسبة للأخرى فى الحالات الآتية إذا كان



م ن = ١٢ سم (متباعدتان)

م ن = ١٠ سم (متماستان من الخارج)

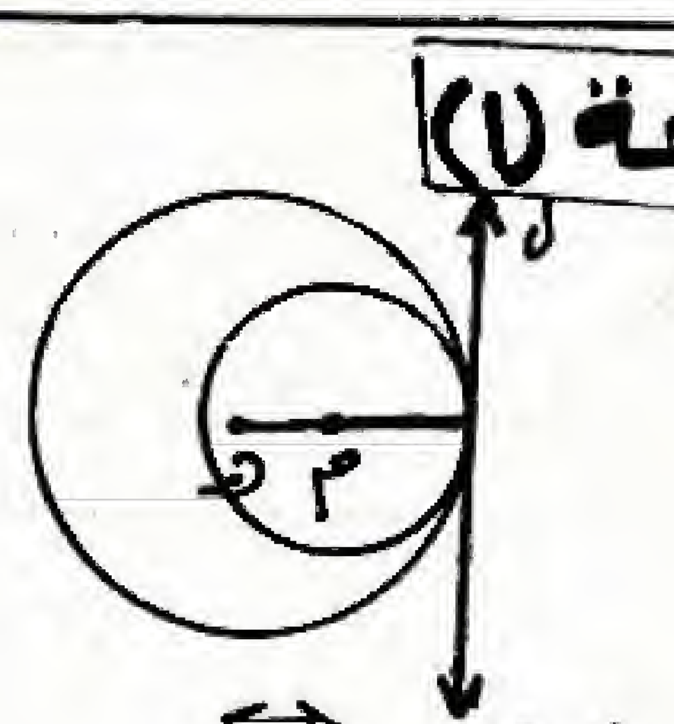
م ن = ٨ سم (متقاطعتان)

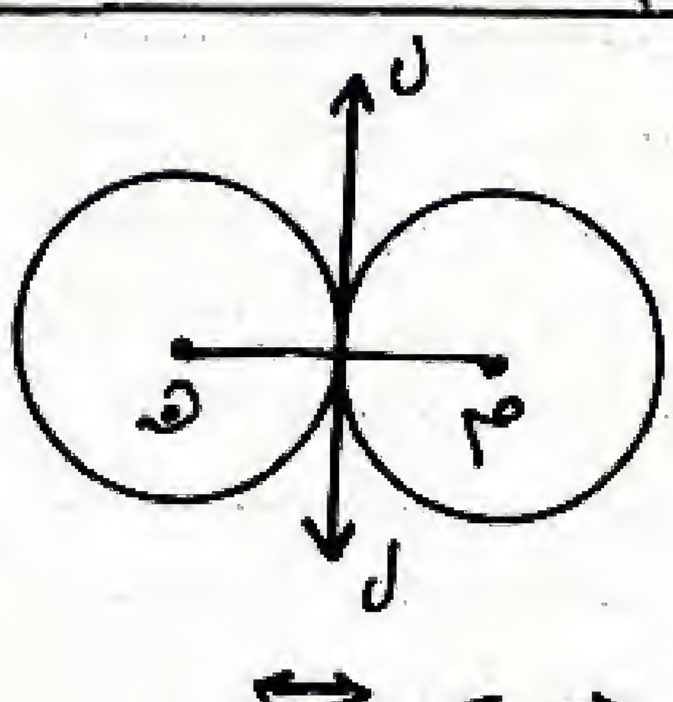
م ن = ٤ سم (متماستان من الداخل)

م ن = ٢ سم (متداخلتان)

م ن = صفر (متحدتى المركز)

نتيجة (١)

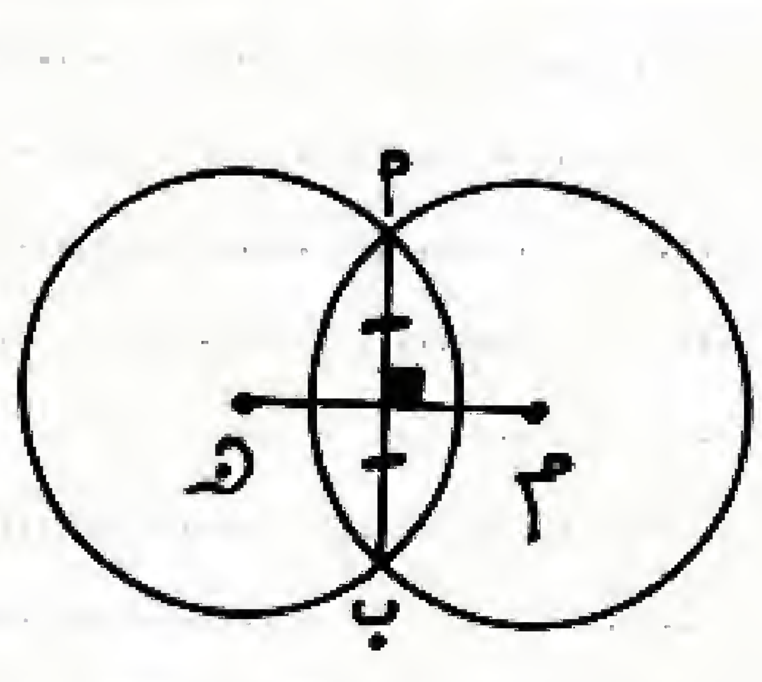




$\overleftrightarrow{\text{م ن}} \perp \overleftrightarrow{\text{ل}}$ $\qquad$ $\overleftrightarrow{\text{م ن}} \perp \overleftrightarrow{\text{ل}}$

«خط المركزين لدائرتين متماستين يمر بنقطة التماس ويكون عمودياً على المماس المشترك عند نقطة التماس»

نتيجة (٢)



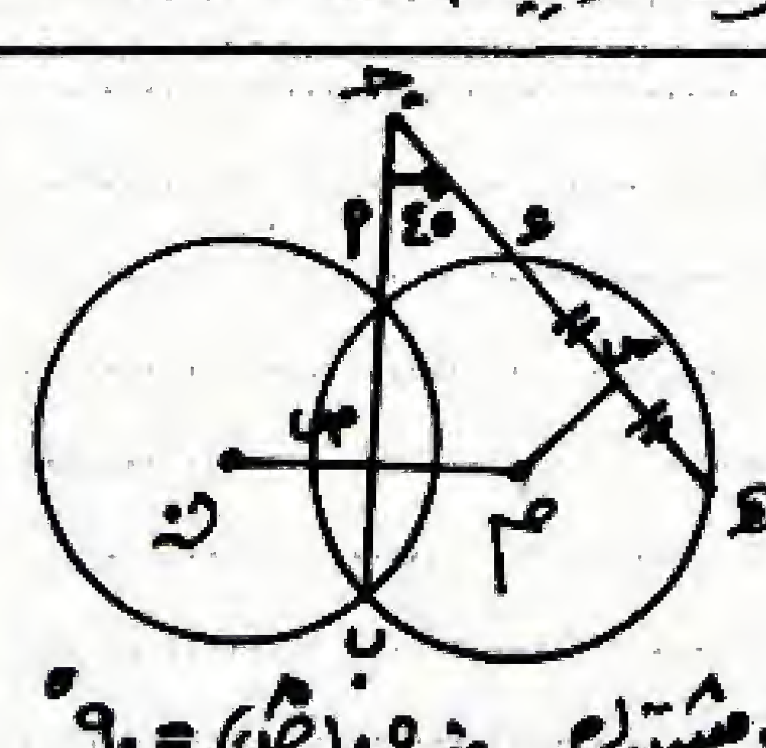
$\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ خط مركزين

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس مشترك

∴ $\overleftrightarrow{\text{م ن}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ وينصفه

« خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عمودياً على الوتر المشترك وينصفه »

مثال (١)



س منتصف $\overline{\text{ء هـ}}$ ، ق(∠جـ) = ٤٠° أوجد ق(∠س م ص)

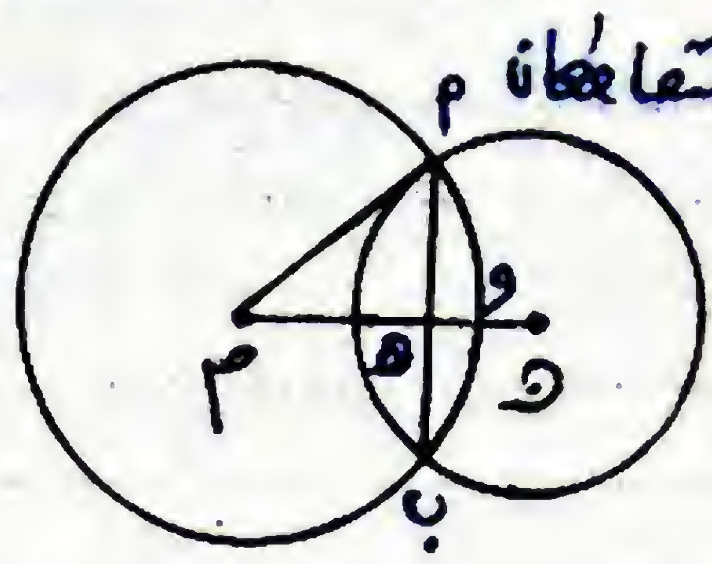
البرهان ∵ س منتصف $\overline{\text{ء هـ}}$

∴ ق(∠م س) = ٩٠° ،

∵ $\overline{\text{م ن}}$ خط مركزين ، $\overline{\text{أ ب}}$ وتر مشترك ∴ ق(∠ص) = ٩٠°

∴ ق(∠س م ص) = ٣٦٠ − (٩٠ + ٩٠ + ٤٠) = ١٣٠° #

مثال ② م ، ن دائرتان متقاطعتان

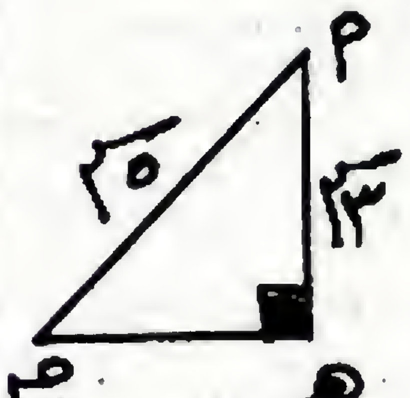


أب = ٦ سم ، م أ = ٥ سم ،
م ن = ٧ سم أوجد طول
أهـ ، هـ و

البرهان ∵ م ن خط مركزين ، أب وتر مشترك

∴ م ن ⊥ أب وينصفه

∴ أهـ = هـ ب = $\frac{٦}{٢}$ = ٣ سم



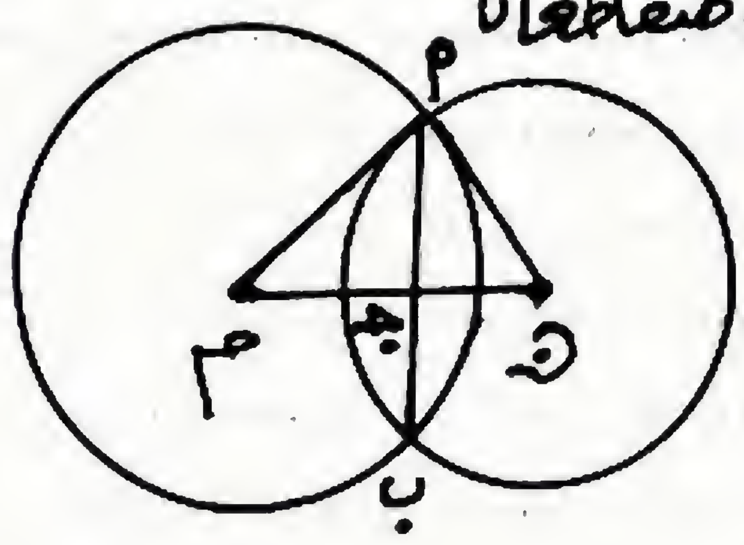
في Δ أ هـ م القائم في هـ

هـ م = $\sqrt{٢٥ - ٩}$ = $\sqrt{١٦}$ = ٤ سم

∴ هـ و = ٥ − ٤ = ١ سم #

حيث م أ = م و = نق = ٥ سم

مثال ③ م ، ن دائرتان متقاطعتان



في أ ، ب م أ = ٦ سم ،
ن أ = ٨ سم ، م ن = ١٠ سم
فأوجد طول أب

البرهان في Δ ن أ م

$(ن م)^2 = (١٠)^2 = ١٠٠$ سم

$(ن أ)^2 + (م أ)^2 = (٨)^2 + (٦)^2 = ٦٤ + ٣٦ = ١٠٠$

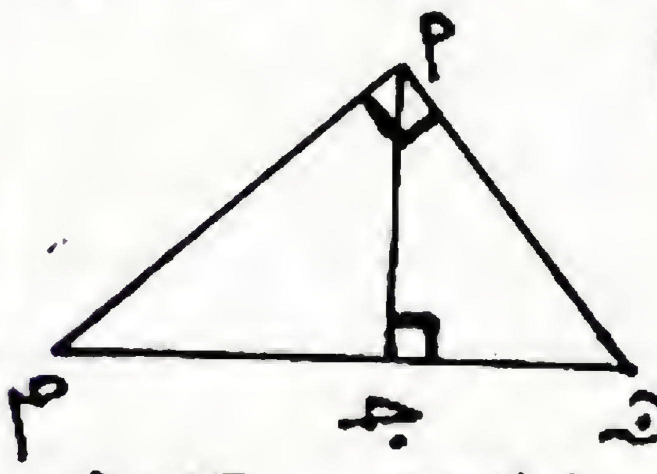
∴ $(ن م)^2 = (ن م)^2 + (م أ)^2$ (يحقق فيثاغورث)

∴ Δ ن أ م قائم في أ

∵ م ن خط مركزين ، أب وتر مشترك

∴ م ن ⊥ أب ، أجـ = جـ ب

في Δ ن أ م القائم في أ



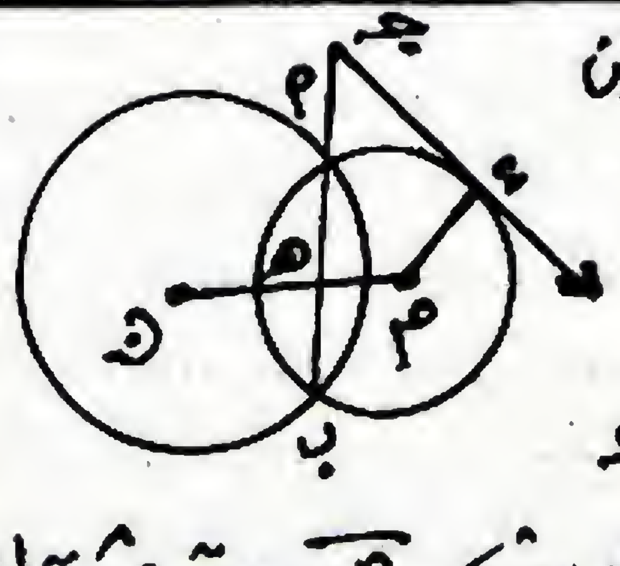
∵ أجـ ⊥ ن م

من نظرية إقليدس

أجـ = $\frac{ن أ \times م أ}{ن م}$ = $\frac{٨ \times ٦}{١٠}$ = ٤,٨ سم

∴ أب = ٢ × أجـ = ٢ × ٤,٨ = ٩,٦ سم #

مثال ④ م ، ن دائرتان متقاطعتان



في أ ، ب ، ق(∠د م هـ) = ١٢٠°
ق(∠جـ) = ٥٥° إثبت أن
جـ د مماس للدائرة م عند د

البرهان ∵ م ن خط مركزين ، أب وتر مشترك

∴ ق(∠هـ) = ٩٠°

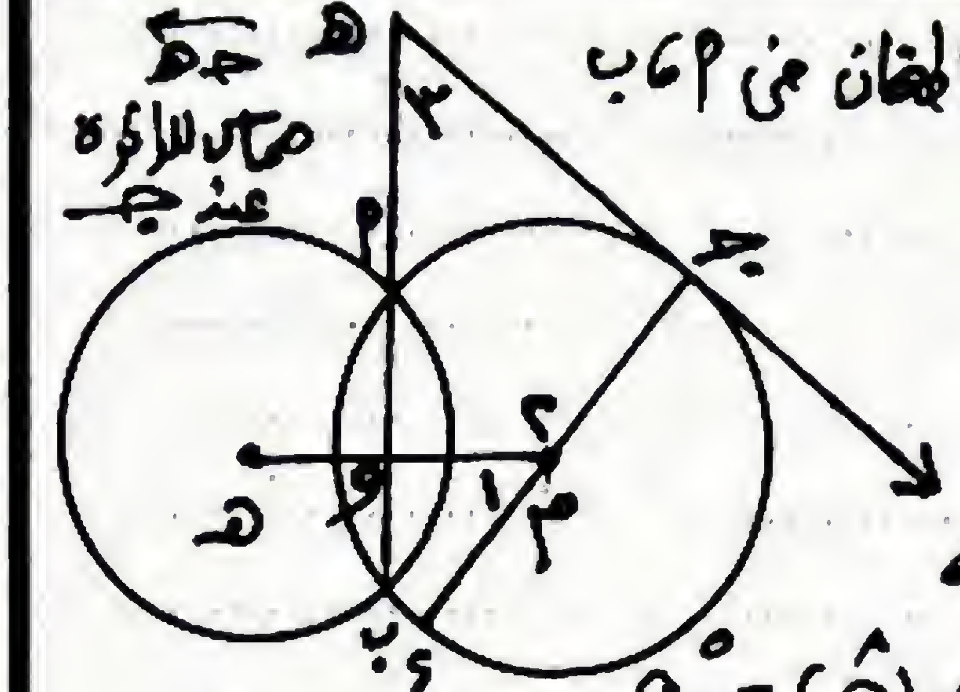
∴ ق(∠د) = ٣٦٠° − (١٢٠° + ٥٥° + ٩٠°)

= ٣٦٠° − ٢٧٠° = ٩٠°

∴ م د ⊥ د جـ

∴ د جـ مماس للدائرة م عند د

مثال ⑤ م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب



جـ د قطر إثبت أن

ق(∠د م ن) = ق(∠جـ هـ ب)

البرهان ∵ جـ هـ مماس ،

م جـ نصف قطر ∴ ق(∠جـ) = ٩٠°

∵ م ن خط المركزين ، أب وتر مشترك

∴ ق(∠و) = ٩٠°

∵ ق(∠جـ) + ق(∠و) = ٩٠ + ٩٠ = ١٨٠°

في الشكل الرباعي هـ جـ م و

ق(∠٣) + ق(∠٢) = ٣٦٠° − ١٨٠° = ١٨٠°

∴ ق(∠٣) + ق(∠٢) = ١٨٠° ← ①

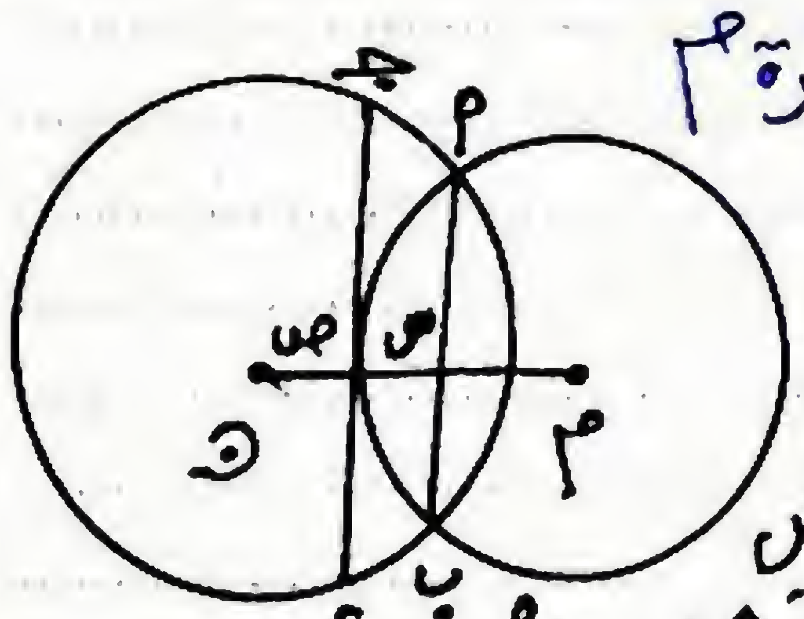
ق(∠٢) + ق(∠١) = ١٨٠ ← ② خط مستقيم

من ① ، ② ينتج أن

ق(∠٣) = ق(∠١)

∴ ق(∠د م ن) = ق(∠جـ هـ ب) #

مثال ⑥ جـ د مماس للدائرة م



عند ص إثبت أن

أب // جـ د

البرهان ∵ م ن خط مركزين

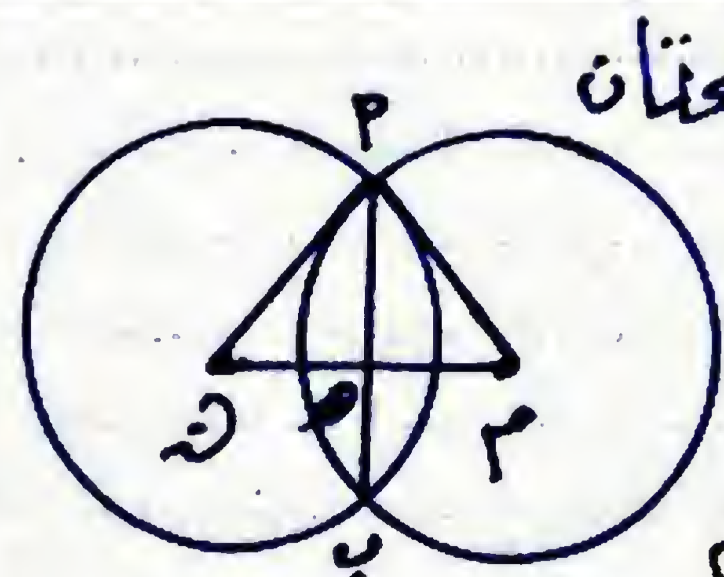
، أب وتر مشترك ∴ ق(∠س) = ٩٠°

∵ جـ د مماس ، م ص نصف قطر ∴ ق(∠ص) = ٩٠°

∴ ق(∠س) = ق(∠ص) وهما في وضع تناظر

∴ أب // جـ د

مثال ⑦ م ، ن دائرتان متقاطعتان



في أ ، ب ومتطابقتان

إثبت أن م هـ = هـ ن

البرهان ∵ م ن خط مركزين

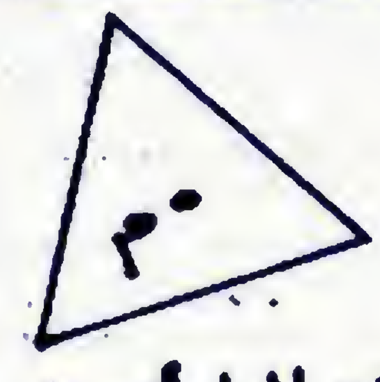
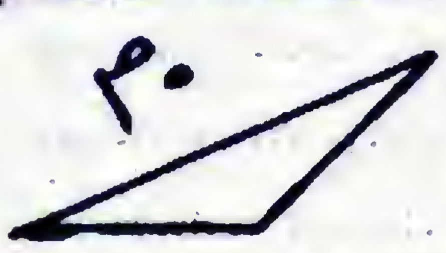
، أب وتر مشترك ∴ ق(∠هـ) = ٩٠°

ΔΔ أ هـ م ، أ هـ ن . (نثبت تطابقهما)

فيهما { م أ = هـ م = نق
م هـ ضلع مشترك
ق(∠م ء هـ) = ق(∠م هـ جـ) = ٩٠°

∴ Δ م هـ م ≡ Δ م هـ جـ وينتج أن

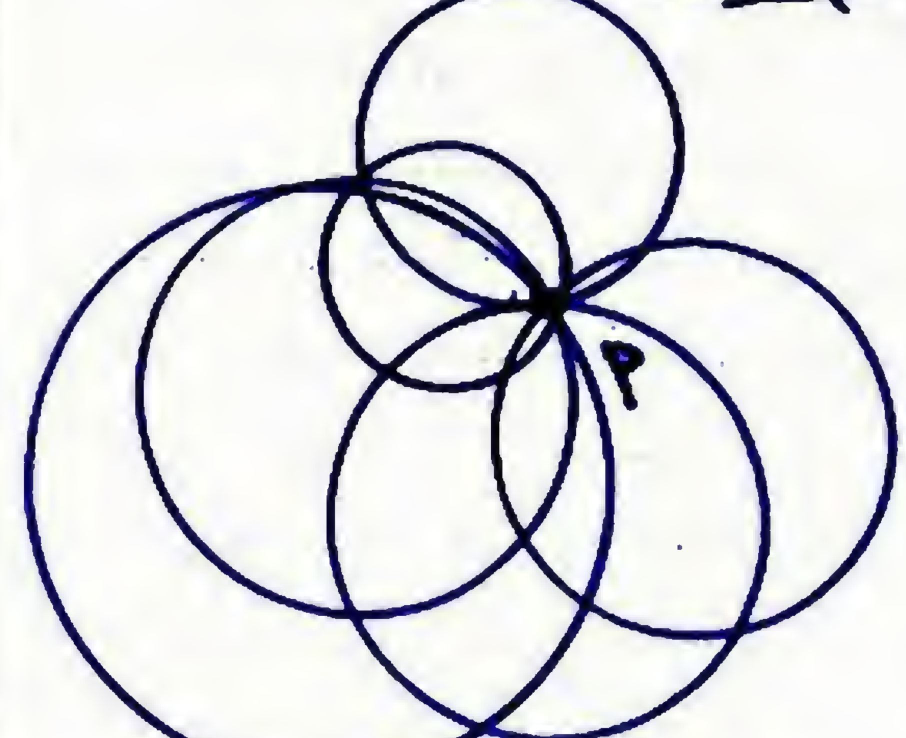
$\boxed{\text{هـ م = هـ جـ}}$ #

المثلث الحاد الزوايا	المثلث القائم	المثلث المنفرج
		
مركز الدائرة داخل المثلث	مركز الدائرة الخارجة عنه يقع في منتصف الوتر	مركز الدائرة الخارجة عنه تقع خارج المثلث

الدرس الرابع : [تعيين الدائرة]

١ رسم دائرة تمر بنقطة واحدة :

← يمكن رسم عدد لانهائي من الدوائر التي تمر بنقطة واحدة.



٢ رسم دائرة تمر بنقطتين

← يمكن رسم عدد لانهائي من الدوائر التي تمر بنقطتين

← مركز هذه الدوائر يقع على محور تماثل القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين

← مركز أصغر دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب هو منتصف $\overline{\text{أب}}$

٣ رسم دائرة تمر بثلاث نقاط

أ تقع على استقامة واحدة

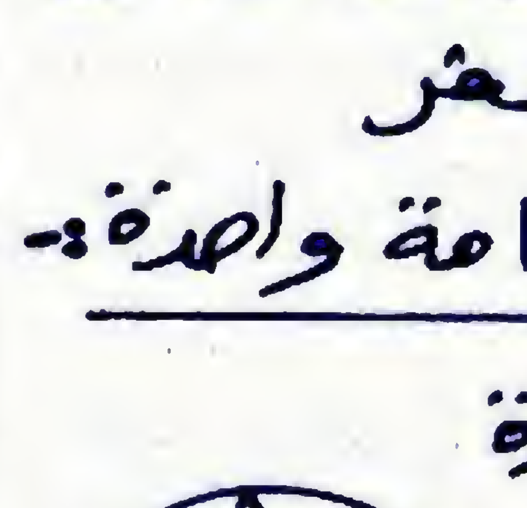
← عدد الدوائر التي تمر بثلاث نقاط على استقامة واحدة = صفر

ب ليست على استقامة واحدة :-

← يمكن رسم دائرة واحدة

← مركز الدائرة الخارجة عن المثلث هي نقطة تقاطع محاور تماثل أضلاعه

[أو الأعمدة المقامة من منتصفات أضلاعه]



← مركز الدائرة الخارجة للمثلث المتساوي الأضلاع هو نقطة تقاطع محاور أضلاعه وهي نفسها نقطة تقاطع متوسطات أضلاعه وهي نفسها نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية وهي نفسها نقطة تقاطع ارتفاعاته .

مثال (١) ارسم $\overline{\text{أب}}$ طولها ٦ سم ثم ارسم الدائرة المارة بالنقطتين أ ، ب والتي نصف قطرها ٤ سم (كم عدد الحلول الممكنة)

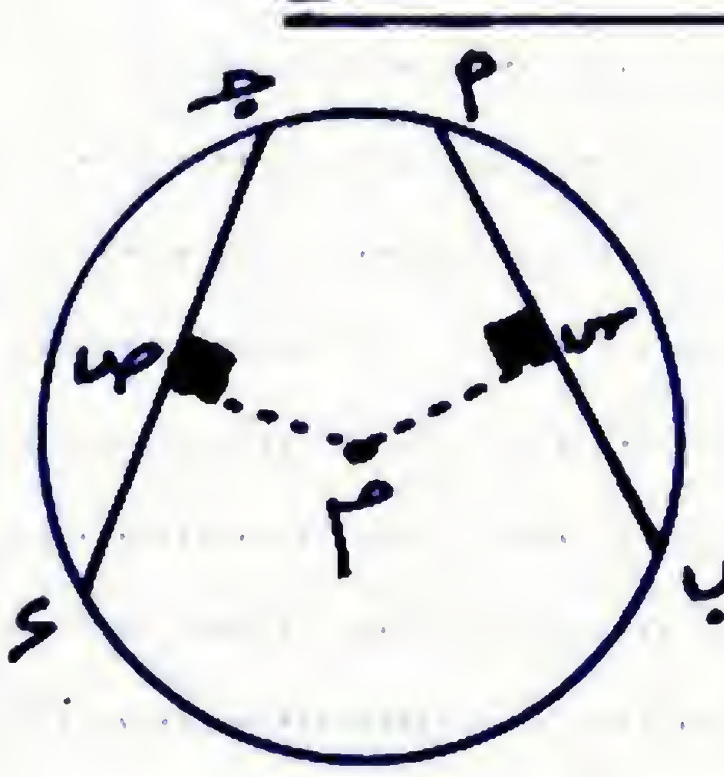
مثال (٢) ارسم Δ أ ب جـ حيث أ ب = ٥ سم ، ب جـ = ٦ سم ، أ جـ = ٧ سم ثم ارسم الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب جـ

الدرس الخامس :-

[علاقة أوتار الدائرة بمركزها]

نظرية

[الأوتار المتساوية في الطول في دائرة تكون على أبعاد متساوية من مركزها]



عكس النظرية

[في الدائرة الواحدة أو في الدوائر المتطابقة إذا كانت الأوتار على أبعاد متساوية من المركز فإنها تكون متساوية في الطول]

∵ أ ب = جـ ء   وتر = وتر

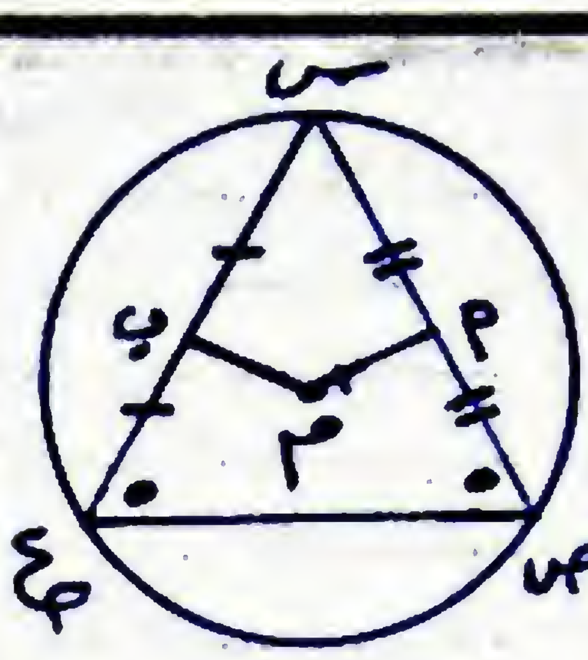
∴ م س = م ص   بعد = بعد

والعكس ∵ م س = م ص   بعد = بعد

∴ أ ب = جـ ء   وتر = وتر

أ/ وليد محمد عكاشة
01002097866

مثال (1) أ منتصف $\overline{سص}$ ، ب منتصف $\overline{سع}$ ، ق($\hat{ص}$) = ق($\hat{ع}$) إثبت أن م أ = م ب



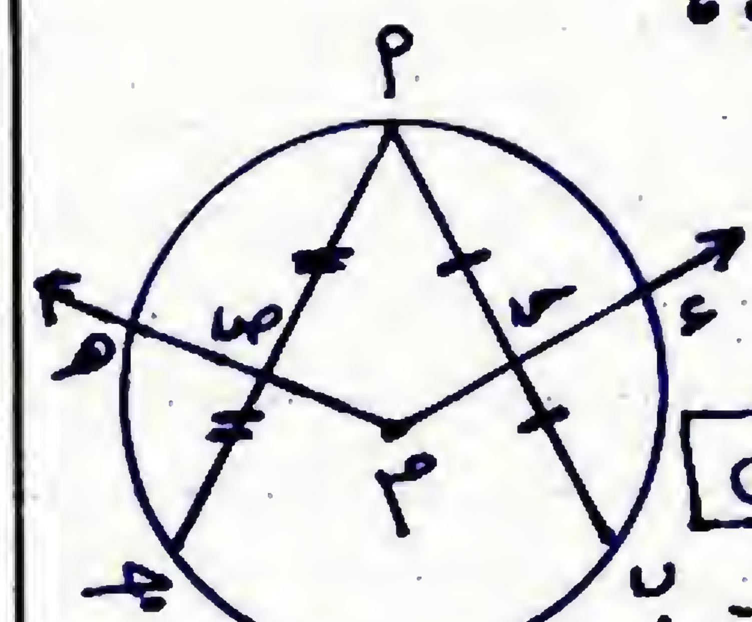
البرهان ∵ أ منتصف $\overline{سص}$ ∴ ق($\hat{أ}$) = 90°

∵ ب منتصف $\overline{سع}$ ∴ ق($\hat{ب}$) = 90°

∵ ق($\hat{ص}$) = ق($\hat{ع}$) ∴ Δ س ص ع متساوي الساقين ∴ س ص = س ع وتر = وتر

∴ م أ = م ب بعد = بعد #

مثال (2) س منتصف $\overline{أب}$ ، ص منتصف $\overline{أجـ}$ ، أب = أجـ إثبت أن $\boxed{د س = هـ ص}$



البرهان ∵ س منتصف $\overline{أب}$ ∴ ق($\hat{س}$) = 90° ، ∵ ص منتصف $\overline{أجـ}$ ∴ ق($\hat{ص}$) = 90°

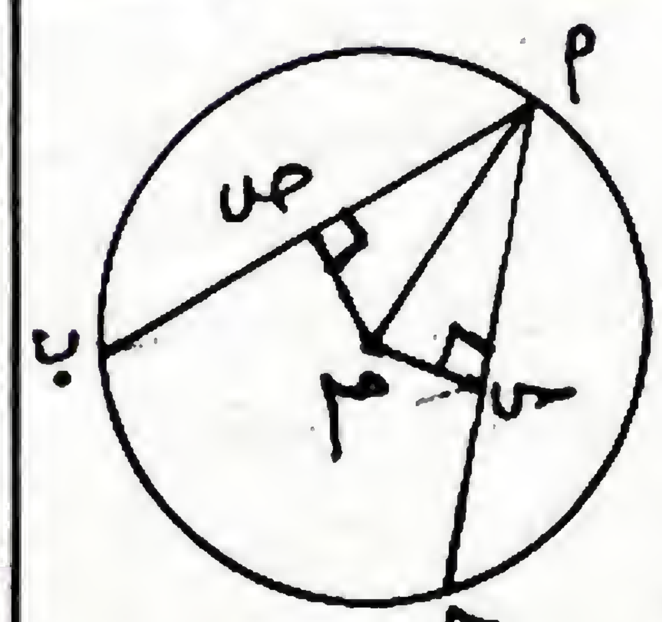
∵ أب = أجـ وتر = وتر ∴ م س = م ص (1) بعد = بعد

∵ م د = م هـ = نق (2)

بطرح (1) من (2) ينتج أن

د س = هـ ص #

مثال (3) $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ وتران متساويان في الطول ، $\overline{مس} \perp \overline{أجـ}$ ، $\overline{مص} \perp \overline{أب}$ إثبت أن ق($\angle$ س أ م) = ق($\angle$ ص أ م)



البرهان ∵ $\overline{مس} \perp \overline{أجـ}$ ∴ س منتصف $\overline{أجـ}$

∵ $\overline{مص} \perp \overline{أب}$ ∴ ص منتصف $\overline{أب}$

∵ أب = أجـ معطى ∴ $\frac{1}{2}$ أب = $\frac{1}{2}$ أجـ

∴ أ س = أ ص

∵ أب = أجـ وتر = وتر

∴ م س = م ص بعد = بعد

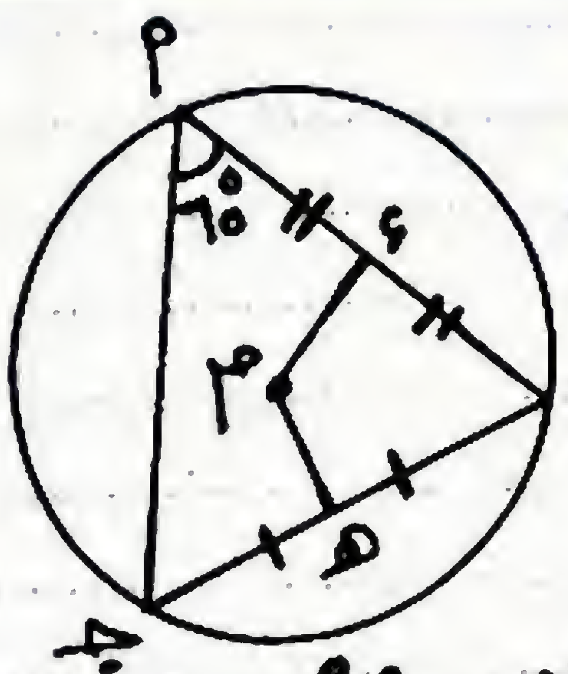
في ΔΔ أ م س ، أ م ص

فيهما { أ س = أ ص ، م س = م ص بعد = بعد ، $\overline{أم}$ ضلع مشترك }

∴ Δ أ س م ≡ Δ أ ص م وينتج من التطابق أن

ق($\angle$ س أ م) = ق($\angle$ ص أ م) #

مثال (4) ق($\hat{أ}$) = 65° ، د ، هـ منتصفا $\overline{أب}$ ، $\overline{بجـ}$ ، م د = م هـ أوجد ق($\hat{ب}$)



البرهان ∵ د منتصف $\overline{أب}$ ∴ ق($\hat{د}$) = 90°

∵ هـ منتصف $\overline{بجـ}$ ∴ ق($\hat{هـ}$) = 90°

∵ م د = م هـ معطى بعد = بعد

∴ أب = ب جـ وتر = وتر

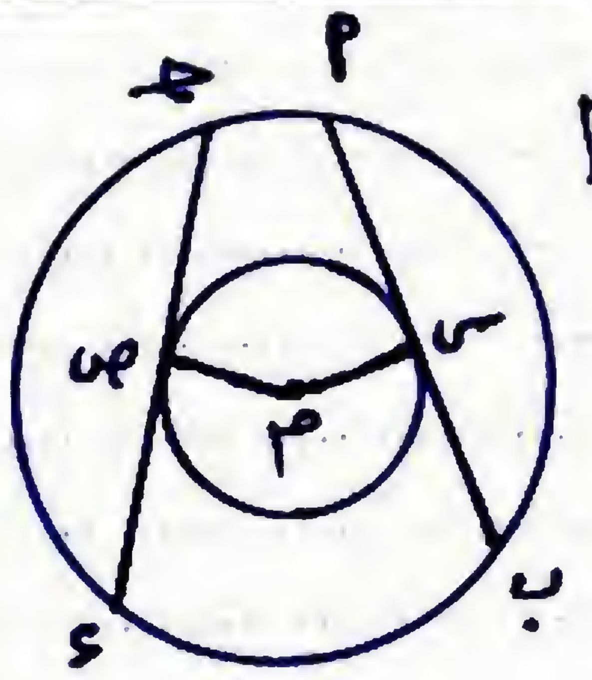
∴ Δ أ ب جـ متساوي الساقين

∴ ق($\hat{أ}$) = ق($\hat{جـ}$) = 65°

∴ ق($\hat{ب}$) = $180^\circ - (65^\circ + 65^\circ)$

= $180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$ #

مثال (5) دائرتان متحدتا المركز م إثبت أن أب = جـ د



البرهان في الدائرة الصغرى م

م س = م ص = نق

في الدائرة الكبرى م

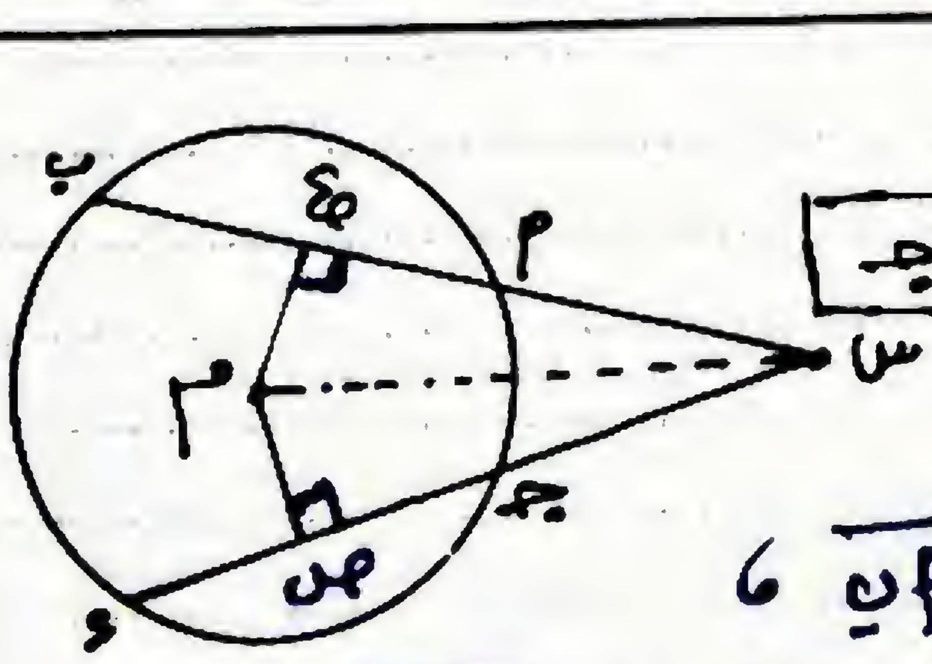
∵ $\overline{أب}$ مماس ∴ $\overline{مس} \perp \overline{أب}$

∵ $\overline{جـد}$ مماس ∴ $\overline{مص} \perp \overline{جـد}$

∵ م س = م ص بعد = بعد

∴ أب = جـ د وتر = وتر #

مثال (6) أب = جـ د إثبت أن $\boxed{س أ = س جـ}$



البرهان العمل نرسم $\overline{مع} \perp \overline{أب}$ ،

نرسم $\overline{مص} \perp \overline{جـد}$ ، نصل $\overline{سم}$

∵ أب = جـ د وتر = وتر ∴ م ع = م ص بعد = بعد

ΔΔ س ع م ، س ص م فيهما

فيهما $\left\{ \begin{array}{l} \text{م ع = م ص بعد = بعد} \\ \text{س م ضلع مشترك} \\ \text{ق(ع̂) = ق(ص̂) = ٩٠°} \end{array} \right.$

∴ Δ س ع م ≡ Δ س ص م ينتج أن

س ع = س ص ← ①

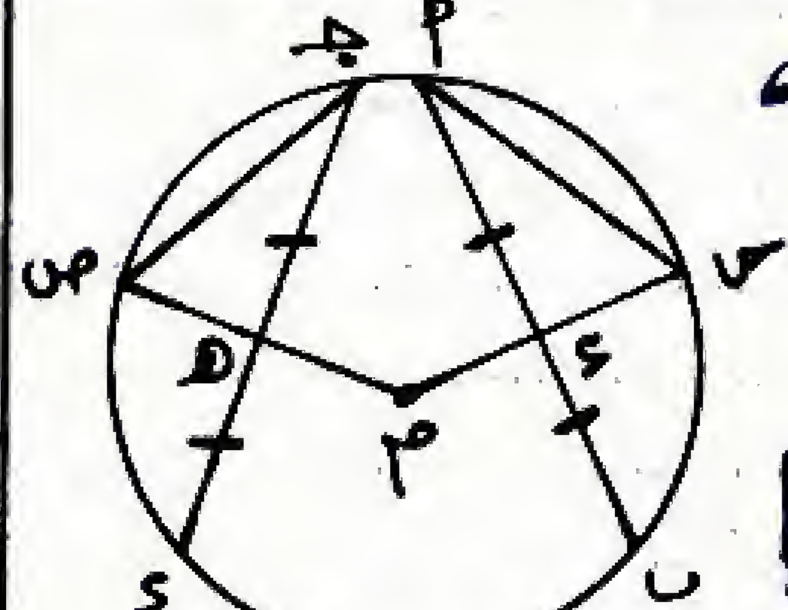
∵ أ ب = جـ د ∴ ½ أ ب = ½ جـ د

∴ أ ع = جـ ص ← ②

بطرح ② من ① ينتج أن

س أ = س جـ #

مثال ٧ ء منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{جـ د}}$ ، أ ب = جـ د



إثبت أن $\boxed{\text{أ س = جـ ص}}$

$\boxed{\text{البرهان}}$ ∵ ء منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ ق(ء̂) = ٩٠°

∵ هـ منتصف $\overline{\text{جـ د}}$ ∴ ق(هـ̂) = ٩٠°

∵ أ ب = جـ د وتر = وتر

∴ م ء = م هـ بعد = بعد ← ①

∵ م س = م ص = نق ← ②

بطرح ② من ① ينتج أن

$\boxed{\text{س ء = ص هـ}}$

∵ أ ب = جـ د ∴ ½ أ ب = ½ جـ د

∴ $\boxed{\text{أ ء = جـ هـ}}$

Δ Δ أ ء س ، جـ هـ ص

فيهما $\left\{ \begin{array}{l} \text{أ ء = جـ هـ} \\ \text{س ء = ص هـ} \\ \text{ق(ء̂) = ق(هـ̂) = ٩٠°} \end{array} \right.$

∴ Δ أ ء س ≡ Δ جـ هـ ص

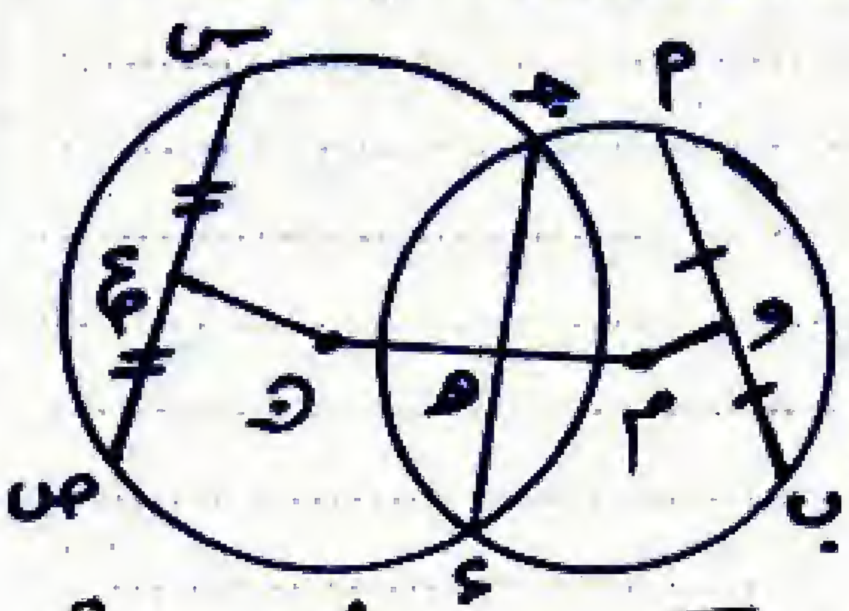
وينتج أن $\boxed{\text{أ س = جـ ص}}$ #

(Maths is Great Subject)

مثال ٨ م ، ن دائرتان متقاطعتان في جـ ، د

و منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ،

ع منتصف $\overline{\text{س ص}}$ ،



و م = م هـ ، ن هـ = ن ع | إثبت أن أ ب = س ص

$\boxed{\text{البرهان}}$ ∵ و منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ ق(و̂) = ٩٠°

∵ ع منتصف $\overline{\text{س ص}}$ ∴ ق(ع̂) = ٩٠°

∵ م و = م هـ بعد = بعد

∴ أ ب = جـ د وتر = وتر ← ①

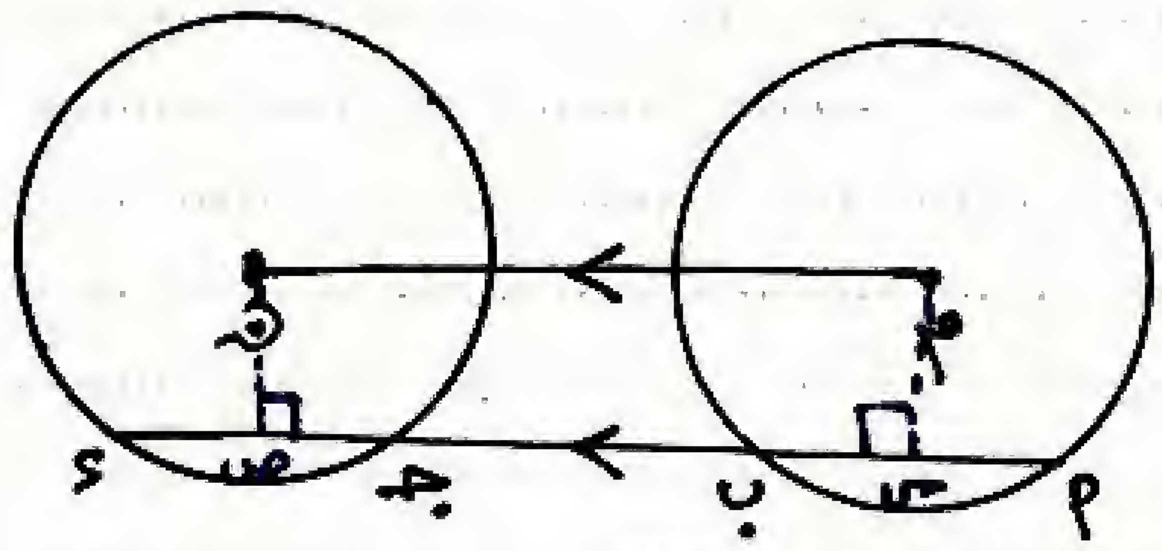
∵ ن هـ = ن ع بعد = بعد

∴ جـ د = س ص وتر = وتر ← ②

من ① ، ② ينتج أن

$\boxed{\text{أ ب = س ص}}$ #

مثال ٩



م ، ن دائرتان متطابقتان

$\overline{\text{م ن}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$

إثبت أن

أ جـ = ب د

$\boxed{\text{البرهان}}$

$\boxed{\text{العمل}}$ نرسم $\overline{\text{م س}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ن ص}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ د}}$

∵ $\overline{\text{م ن}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ ∴ م س ص ن مستطيل

∴ م س = ن ص بعد = بعد

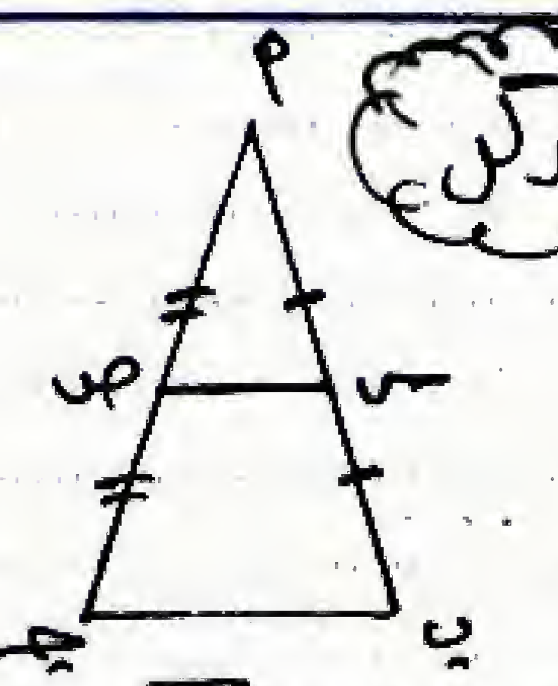
∴ أ ب = جـ د وتر = وتر

بإضافة $\overline{\text{ب جـ}}$ للطرفين

أ ب + ب جـ = جـ د + ب جـ

∴ أ جـ = د ب #

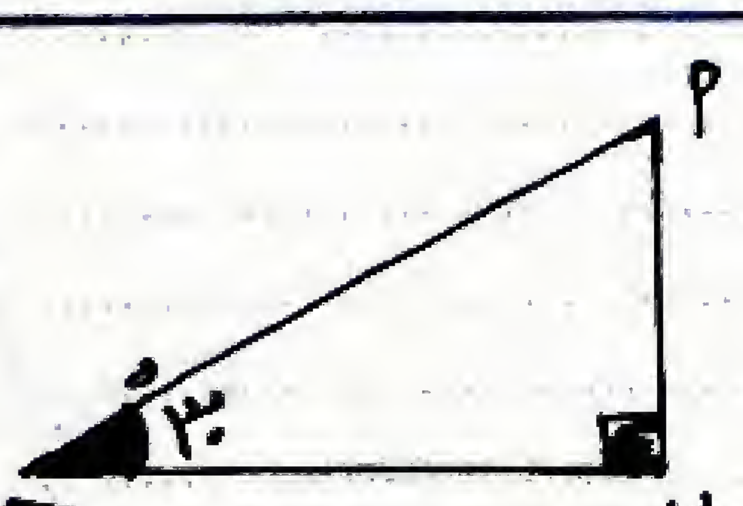
تذكر



س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

ص منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$

∴ س ص = ½ ب جـ



∵ ق(ب̂) = ٩٠° ، ق(جـ̂) = ٣٠°

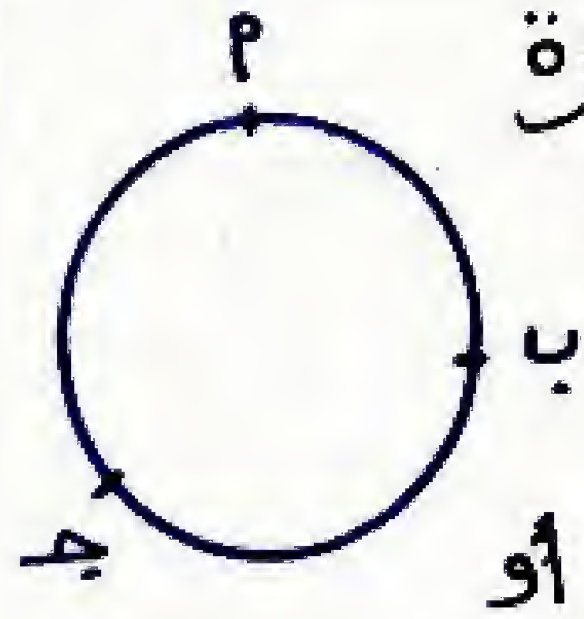
∴ $\boxed{\text{أ ب = ½ أ جـ}}$

(الضلع المقابل للزاوية ٣٠° يساوي ½ طول الوتر)

الوحدة الخامسة

١ [الزوايا والأقواس]

القوس: هو جزء من الدائرة محدد بنقطتين على الدائرة ويرمز له بالرمز



$\overset{\frown}{\text{أب}}$ أو $\overset{\frown}{\text{بجـ}}$ أو $\overset{\frown}{\text{أجـ}}$ أو $\overset{\frown}{\text{أبجـ}}$ أو $\overset{\frown}{\text{بجـأ}}$ أو $\overset{\frown}{\text{بأجـ}}$

قياس الدائرة = ٣٦٠°

قياس أي جزء في الدائرة = الجزء × ٣٦٠°

مثال: قياس نصف الدائرة

= $\frac{1}{2}$ × ٣٦٠° = ١٨٠°

قياس $\frac{1}{3}$ دائرة

= $\frac{1}{3}$ × ٣٦٠° = ١٢٠°

قياس $\frac{1}{4}$ دائرة

= $\frac{1}{4}$ × ٣٦٠° = ٩٠°

محيط الدائرة = ٢ π نق

محيط أي جزء من الدائرة = الجزء × ٢ π نق

مثال: نصف طول الدائرة

= $\frac{1}{2}$ × ٢ π نق = π نق سم

$\frac{1}{4}$ طول الدائرة

= $\frac{1}{4}$ × ٢ π نق = $\frac{\pi \text{ نق}}{2}$ = $\frac{1}{2}$ π نق

نتائج هامة:-

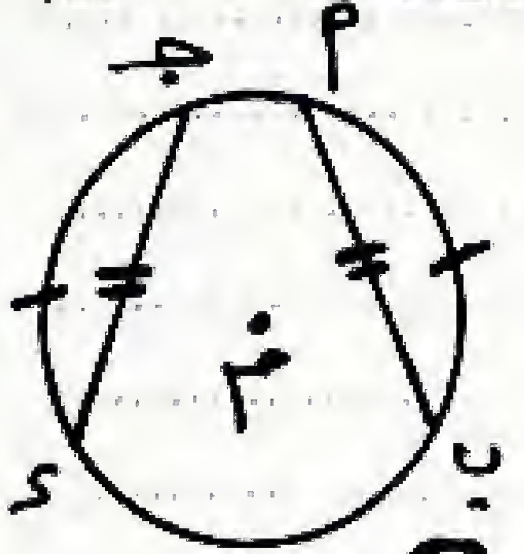
← في الدائرة الواحدة أو في الدوائر المتطابقة

١ الأقواس المتساوية في الطول تكون متساوية في القياس والعكس صحيح

∵ ق($\overset{\frown}{\text{أب}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{جـد}}$)

∴ طول $\overset{\frown}{\text{أب}}$ = طول جـد

٢ الوتران المتساويان يحصران قوسان متساويان في القياس



∵ أب = جـد

فإن ق($\overset{\frown}{\text{أب}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{جـد}}$)

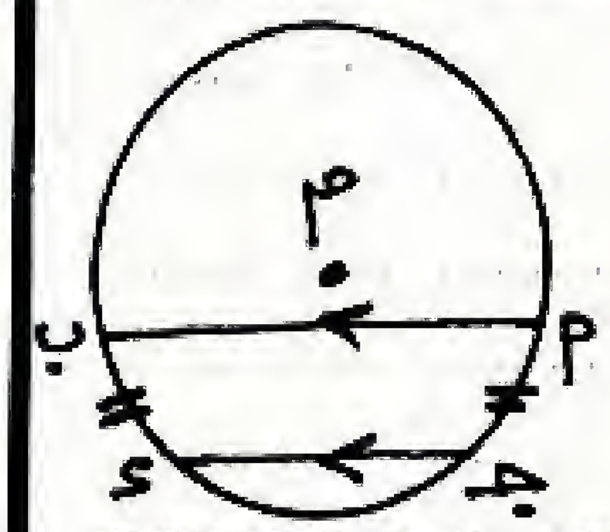
والعكس إذا كان ق($\overset{\frown}{\text{أب}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{جـد}}$)

∴ أب = جـد

قوس = قوس

∴ وتر = وتر (والعكس)

٣ الوتران المتوازيان في الدائرة يحصران قوسين متساويين في القياس.

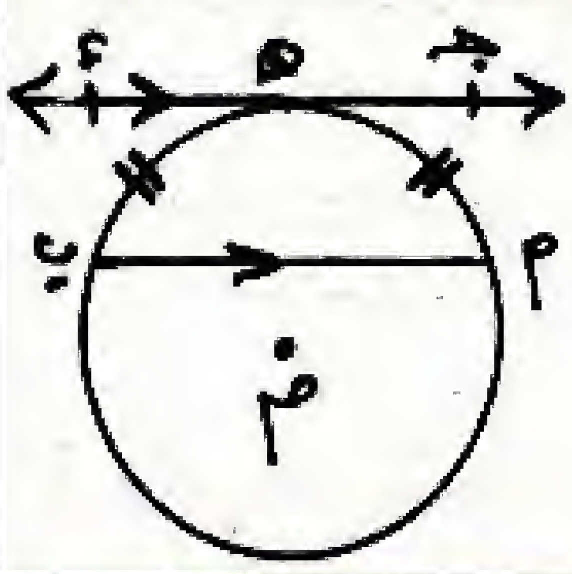


∵ $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{جـد}}$

∴ ق($\overset{\frown}{\text{أجـ}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{بد}}$)

والعكس صحيح

٤ القوسان المحصوران بين وتر مماس يوازيه في الدائرة متساويان في القياس



∵ $\overleftrightarrow{\text{هـد}}$ مماس ، $\overline{\text{أب}}$ وتر

∵ $\overleftrightarrow{\text{هـد}}$ // $\overline{\text{أب}}$

∴ ق($\overset{\frown}{\text{أهـ}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{هـب}}$)

العلاقة بين طول القوس وقياس القوس:-

طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{360^\circ}$ × ٢ π نق

حيث نق هو نصف القطر ، π = $\frac{22}{7}$

مثال ١ أوجد قياس القوس الذي يمثل $\frac{1}{3}$ قياس الدائرة وإذا كان نصف قطر الدائرة ١٥ سم أوجد طول هذا القوس (π = ٣٫١٤)

الحل

قياس القوس = $\frac{1}{3}$ × ٣٦٠° = ١٢٠°

طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{360^\circ}$ × ٢ π نق

= $\frac{120}{360^\circ}$ × ٢ × ٣٫١٤ × ١٥ = ٣١٫٤ سم #

* الزاوية المركزية :-

هي زاوية رأسها مركز الدائرة وضلعاها أنصاف أقطار في الدائرة

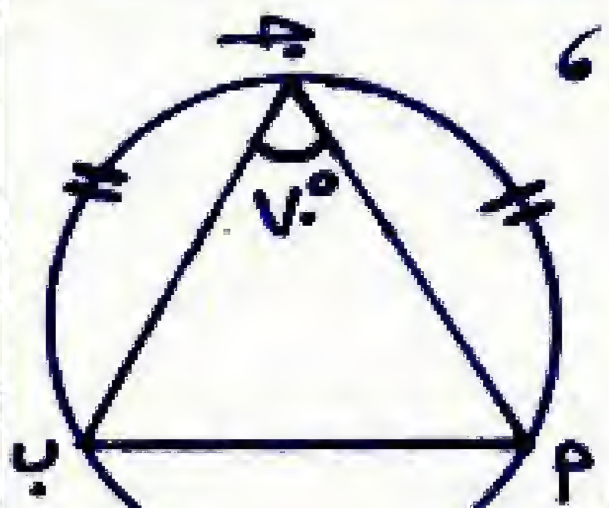
∠ أ م ب زاوية مركزية

* قياس القوس : يساوي قياس الزاوية المركزية المقابلة لهذا القوس

أي أن ق(∠أ م ب) = ق(⌢أ ب)

مثال ② ق(⌢أ جـ) = ق(⌢ب جـ) ، ق(∠أ جـ ب) = $70°$

أوجد ق(∠أ ب جـ)



البرهان ∵ ق(⌢أ جـ) = ق(⌢ب جـ) قوس = قوس

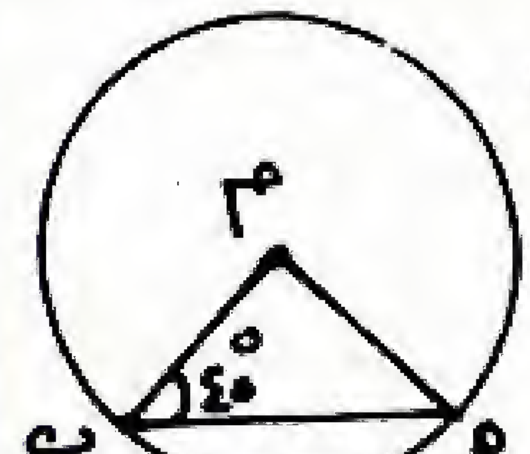
∴ أ جـ = ب جـ وتر = وتر

∴ Δ أ جـ ب متساوي الساقين

∴ ق(∠جـ أ ب) = ق(∠أ ب جـ) = $\frac{180 - 70}{2}$

= $55°$ #

مثال ③ ق(∠م ب أ) = $45°$ ، أ م = $7\sqrt{2}$ أوجد طول ⌢أ ب ($\pi = \frac{22}{7}$)



البرهان في Δ أ م ب

∵ م أ = م ب = نق ∴ Δ م أ ب متساوي الساقين

∴ ق(∠أ) = ق(∠ب) = $45°$

∴ ق(∠أ م ب) = $180° - (45° + 45°) = 90°$

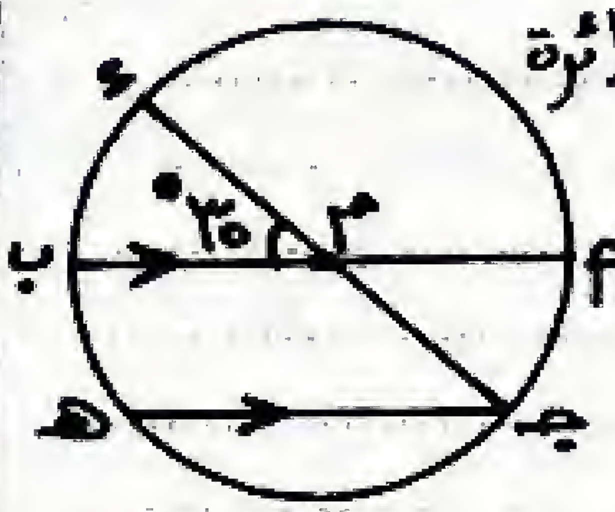
∴ ق(⌢أ ب) = ق(∠أ م ب) = $90°$

∴ طول ⌢أ ب = $\frac{\text{ق}(\overset{\frown}{\text{أ ب}})}{360°} \times 2\pi$ نق

= $\frac{90}{360°} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 7$

= $11\sqrt{2}$ #

مثال ④ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ قطران في الدائرة م بحيث ق(∠ء م ب) = $35°$ ، $\overline{\text{جـ هـ}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ أوجد ق(⌢ب هـ)



البرهان ∵ ق(∠ء م ب) = ق(∠أ م جـ) = $35°$ بالتقابل بالرأس

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{جـ هـ}}$ وتر // وتر

∴ ق(⌢أ جـ) = ق(⌢ب هـ) قوس = قوس

∵ ق(⌢أ جـ) = ق(∠أ م جـ) = $35°$

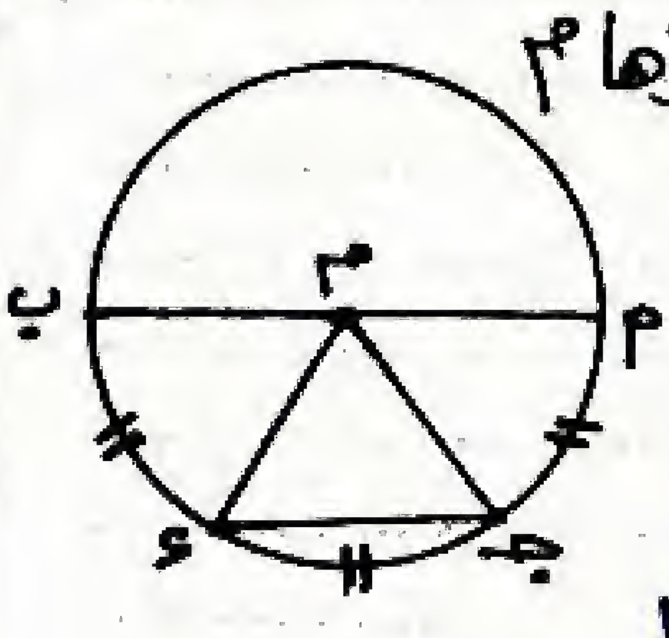
∴ ق(⌢ب هـ) = $35°$ #

مثال ⑤ $\overline{\text{أ ب}}$ قطر في الدائرة التي مركزها م

ق(⌢أ جـ) = ق(⌢جـ ء) = ق(⌢ء ب)

إثبت أن

Δ م جـ ء متساوي الأضلاع



البرهان ∵ $\overline{\text{أ ب}}$ قطر في الدائرة م

∴ ق(⌢أ جـ ب) = $180°$

∴ ق(⌢أ جـ) = ق(⌢جـ ء) = ق(⌢ء ب) = $\frac{180}{3} = 60°$

∴ ق(∠جـ م ء) = $60°$ المركزية

في Δ م جـ ء ∵ م جـ = م ء

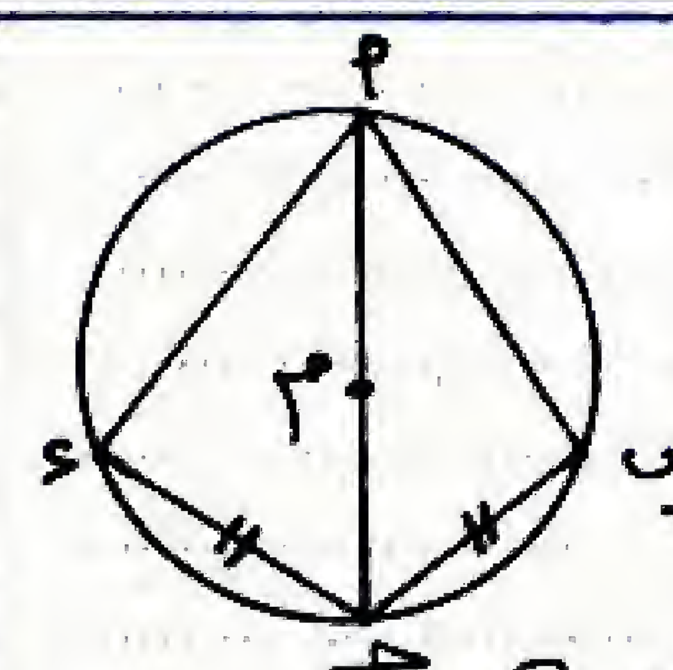
∴ ق(∠جـ) = ق(∠ء) = $\frac{180 - 60}{2} = 60°$

∴ ق(∠جـ) = ق(∠ء) = ق(∠جـ م ء) = $60°$

∴ Δ م جـ ء متساوي الأضلاع

مثال ⑥ أ ب جـ ء شكل رباعي ، $\overline{\text{أ جـ}}$ قطر في الدائرة ، جـ ب = جـ ء

إثبت أن ق(⌢أ ب) = ق(⌢أ ء)



البرهان ∵ $\overline{\text{أ جـ}}$ قطر في الدائرة م

∴ ق(⌢أ ب جـ) = ق(⌢أ ء جـ) ← ①

∵ ب جـ = جـ ء وتر = وتر

∴ ق(⌢ب جـ) = ق(⌢ء جـ) ← ② قوس = قوس

بطرح ② من ①

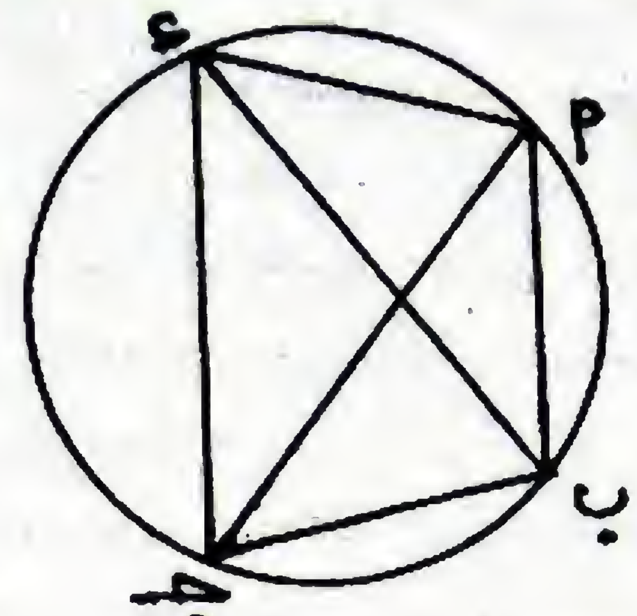
∴ ق(⌢أ ب) = ق(⌢أ ء) قوس = قوس

∴ أ ب = أ ء وتر = وتر #

[السؤال نصف العلم والمعرفة]

فلا تخجل من السؤال أو كثرة الأسئلة

مثال ٧ في الشكل المقابل



أجـ = ب ء

فأثبت أن أ ء = ب جـ

البرهان ∵ أجـ = ب ء

وتر = وتر

∴ ق(أ ب جـ) = ق(ب أ ء)

بطرح ق(أ ب) من الطرفين

ينتج أن

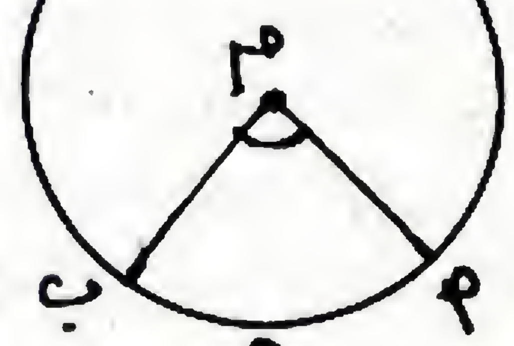
ق(أ ء) = ق(ب جـ) قوس = قوس

∴ أ ء = ب جـ وتر = وتر #

الدرس الثاني :-

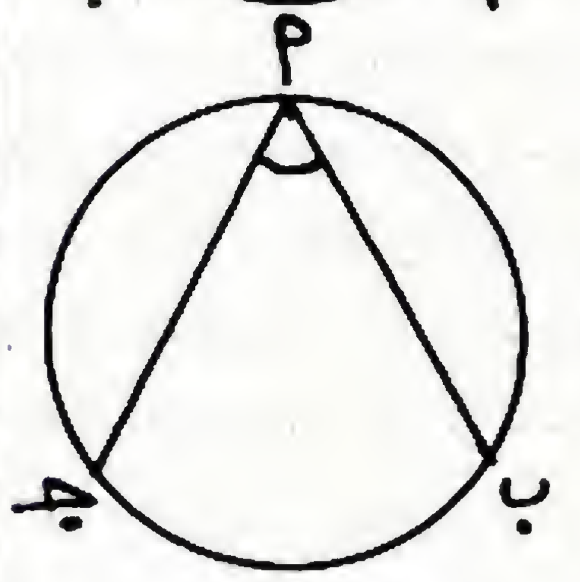
العلاقة بين الزاوية المحيطية والمركزية والمماسية المشتركة معاً في القوس

١ الزاوية المركزية :-



هي زاوية رأسها مركز الدائرة وضلعاها أنصاف أقطار في الدائرة.

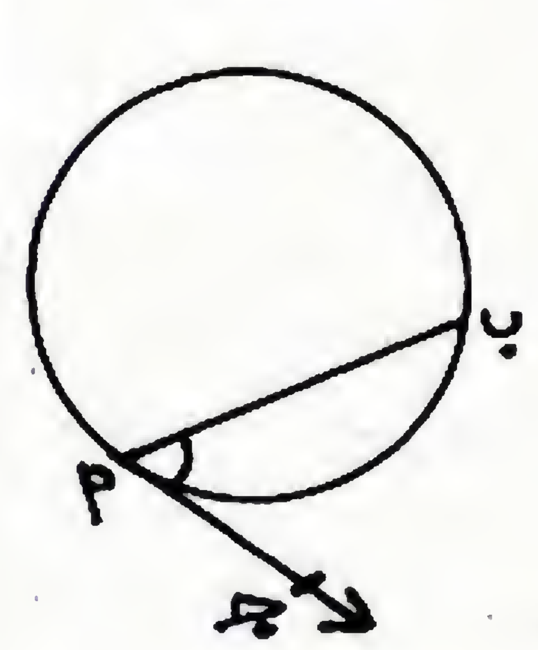
٢ الزاوية المحيطية :-



هي زاوية رأسها تقع على الدائرة وضلعاها وتران في الدائرة

∠ ب أ جـ محيطية

٣ الزاوية المماسية :-



هي زاوية رأسها على الدائرة وضلعاها وتر ومماس مرسوم من إحدى نهايتي الوتر في الدائرة

∠ ب أ جـ مماسية تقابل أ ب

نظرية ١

قياس الزاوية المحيطية = ½ قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس

قياس الزاوية المحيطية = ½ قياس القوس المقابل لها.

∵ ق(∠ب أ جـ) = ½ ق(∠ب م جـ)

المحيطية = ½ المركزية

ق(∠ب أ جـ) = ½ ق(ب جـ)

ق(∠ب م جـ) = ق(ب جـ)

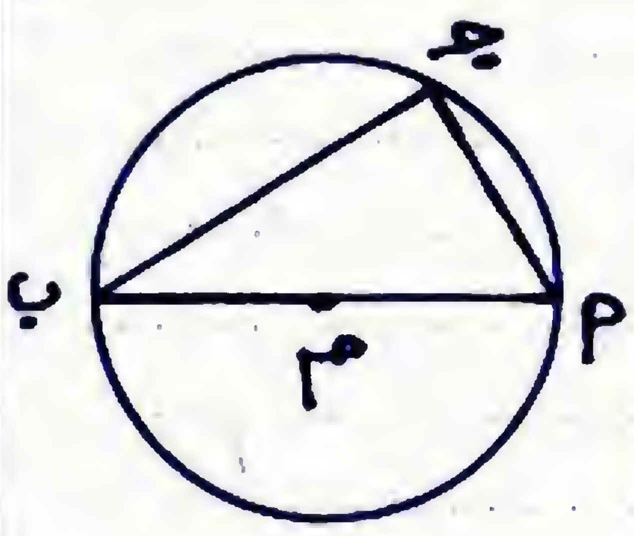
نظرية ٢

الزوايا المحيطية التي تخص نفس القوس في الدائرة الواحدة متساوية في القياس

∠ أ ، ∠ ب ، ∠ جـ زوايا محيطية مرسومة على نفس القوس ء هـ

∴ ق(∠أ) = ق(∠ب) = ق(∠جـ)

نتيجة هامة :-



الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة قائمة

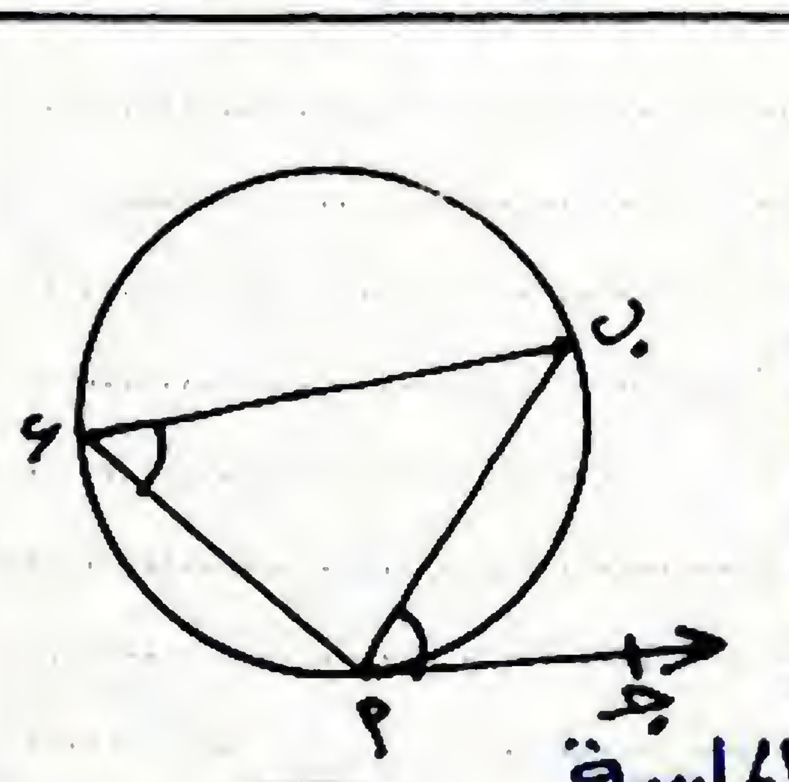
∵ أ ب قطر في الدائرة م

∴ ق(∠أ جـ ب) = ٩٠° قائمة

ملاحظات

* قياس القوس يساوي ضعف قياس الزاوية المحيطية المحصور بين ضلعيها
* قياس الزاوية المركزية تساوي ضعف قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في نفس القوس

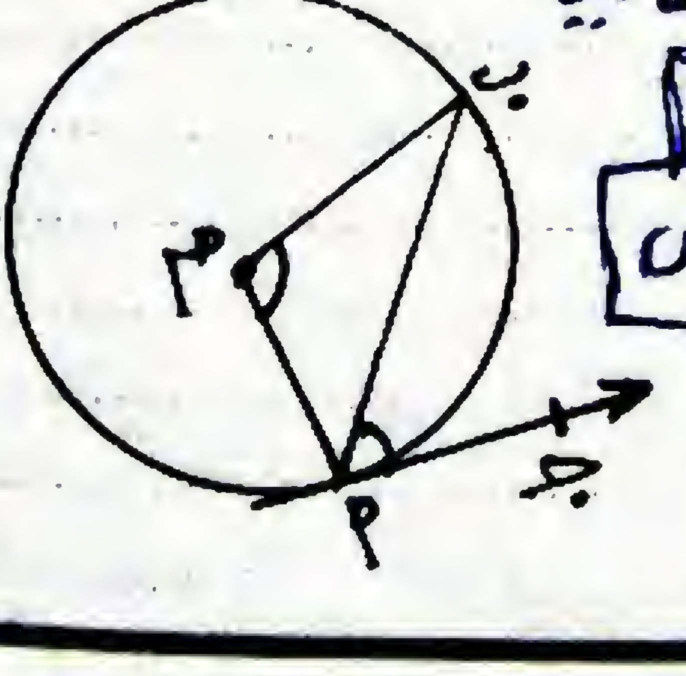
نظرية ٣



قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس

ق(∠ء) المحيطية = ق(∠ب أ جـ) المماسية

نتيجة

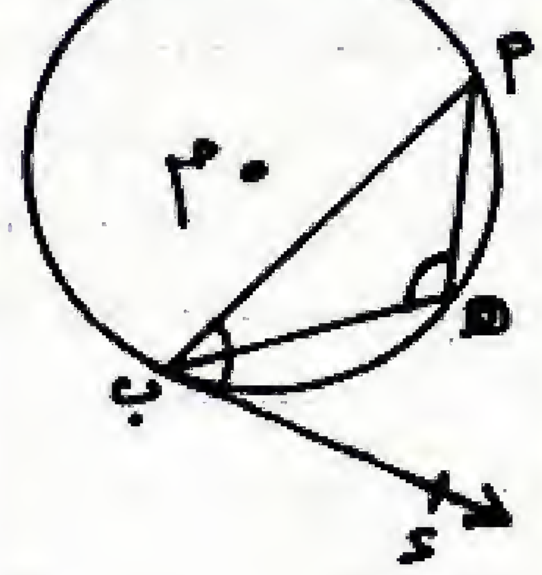


قياس الزاوية المماسية تساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس

ق(∠ب م أ) = ق(ب أ جـ)

ملاحظة

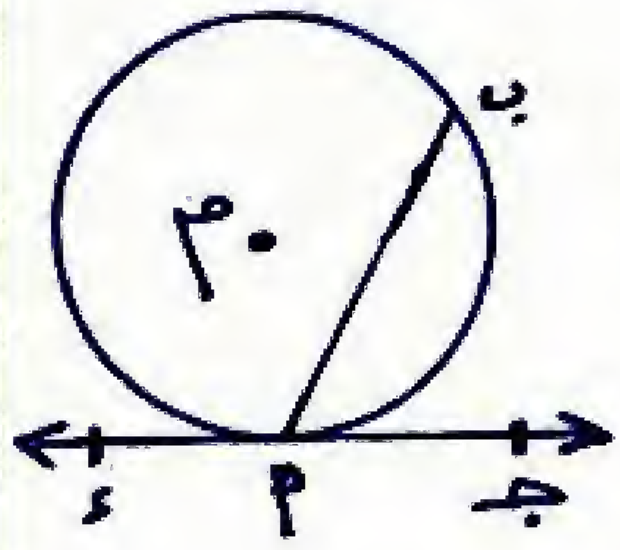
الزاوية المماسية تكمل الزاوية المحيطية المرسومة على وتر الزاوية المماسية وفي جهة واحدة منه .



ق (∠ أ هـ ب) المحيطية + ق (∠ أ ب ء) المماسية = ١٨٠°

ملاحظة

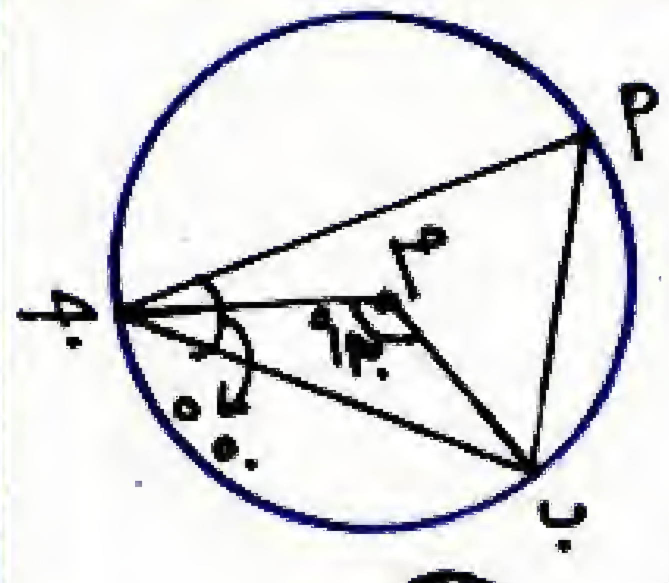
قياس الزاوية المماسية = ½ قياس القوس المحصور بين ضلعيها



ق (∠ ب أ جـ) = ½ ق (⌒أ ب) الأصغر

ق (∠ ب أ ء) = ½ ق (⌒أ ب) الأكبر

مثال ① ق (∠ ب م جـ) = ١٣٠° ، ق (∠ أ جـ ب) = ٥٠° أوجد ق (∠ أ ب جـ)



البرهان ∵ ∠ أ محيطية ، ∠ م مركزية مشتركتان في ⌒ب جـ

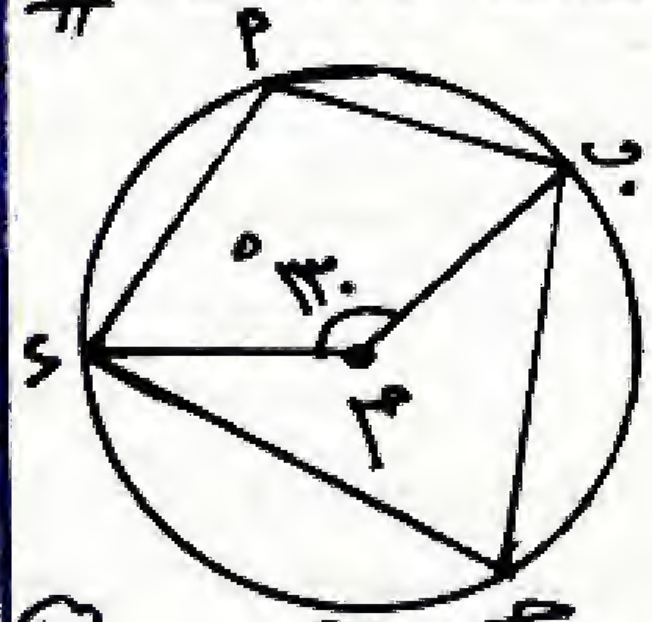
∴ ق (∠ أ) = ½ ق (∠ ب م جـ) = ٦٥°

في △ أ ب جـ

ق (∠ أ ب جـ) = ١٨٠ − (٦٥° + ٥٠°) = ٦٥°

#

مثال ② ق (∠ ب م ء) = ١٣٠°



أوجد ق (∠ ب جـ ء) ، ق (∠ ب أ ء)

البرهان ق (∠ ب جـ ء) = ½ ق (∠ ب م ء) = ٦٥° #

محيطية ومركزية مشتركتان في (⌒ب أ ء)

∴ ق (⌒ب أ ء) = ٢ ق (∠ جـ) = ١٣٠°

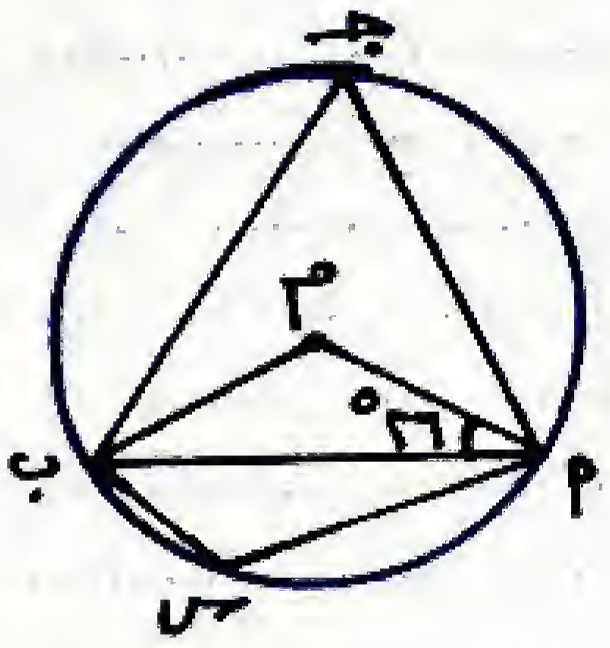
∴ ق (⌒ب جـ ء) = ٣٦٠ − ١٣٠ = ٢٣٠°

∵ ∠ ب أ ء محيطية تقابل ⌒ب جـ ء

∴ ق (∠ ب أ ء) = ½ ق (⌒ب جـ ء) = #

= ½ × ٢٣٠ = ١١٥°

مثال ③ ق (∠ م أ ب) = ٢٦°



أوجد بالبرهان

① ق (∠ أ م ب) ② ق (∠ أ جـ ب)

③ ق (∠ أ س ب) ④ ق (⌒أ س ب)

البرهان ∵ م أ = م ب = نق

∴ ق (∠ م أ ب) = ق (∠ م ب أ) = ٢٦°

∴ ق (∠ أ م ب) = ١٨٠ − (٢٦° + ٢٦°) = ١٢٨° # ①

∴ ق (∠ أ جـ ب) = ½ ق (∠ أ م ب) = ٦٤°

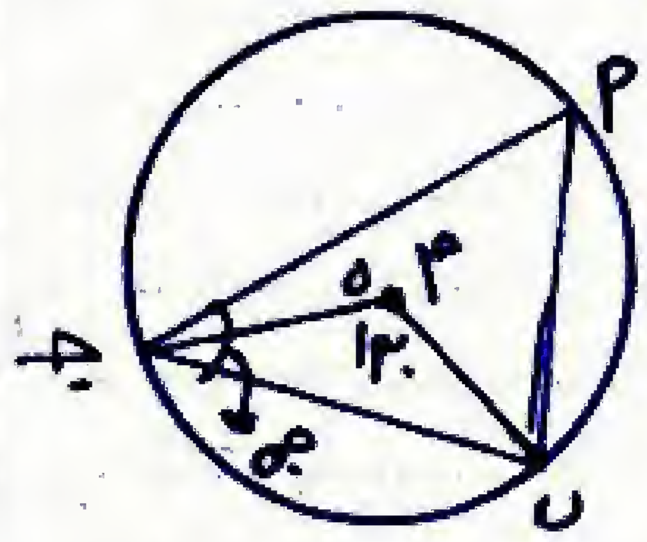
محيطية ومركزية مشتركتان في ⌒أ س ب

∴ ق (∠ أ م ب) = ق (⌒أ س ب) = ١٢٨°

∴ ق (⌒أ جـ ب) = ٣٦٠ − ١٢٨ = ٢٣٢°

∴ ق (∠ أ س ب) = ½ ق (⌒أ جـ ب) = ١١٦°

مثال ④ ق (∠ ب م جـ) = ١٣٠° ، ق (∠ أ جـ ب) = ٥٠°



أوجد ق (∠ أ ب جـ) .

البرهان ∵ ∠ أ محيطية ، ∠ م جـ مركزية قياسها = ١٣٠ ومشتركتان في ب جـ

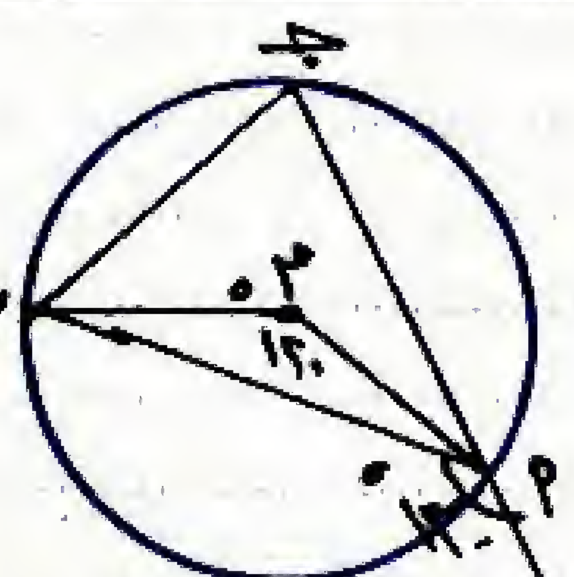
∴ ق (∠ أ) = ½ ق (∠ ب م جـ) = ٦٥°

في △ أ ب جـ

ق (∠ أ ب جـ) = ١٨٠ − (٦٥° + ٥٠°) .

= ١٨٠ − ١١٥° = ٦٥° #

مثال ⑤ ق (∠ ب أ ء) = ١٣٠° ، ق (∠ أ م ب) = ١٢٠° أوجد ق (∠ م ب جـ)



الحل

في △ أ م ب ∵ م أ = م ب = نق

∴ ق (∠ م ب أ) = (١٨٠ − ١٢٠) ÷ ٢ = ٣٠°

∴ ق (∠ جـ) = ½ ق (∠ م) = ٦٠° محيطية ومركزية مشتركتان في ⌒أ ب .

∵ ∠ ء أ ب خارجة عن △ أ جـ ب

∴ ق (∠ أ ب جـ) = ١٣٠ − ٦٠ = ٧٠°

∴ ق (∠ م ب جـ) = ٧٠ − ٣٠ = ٤٠°

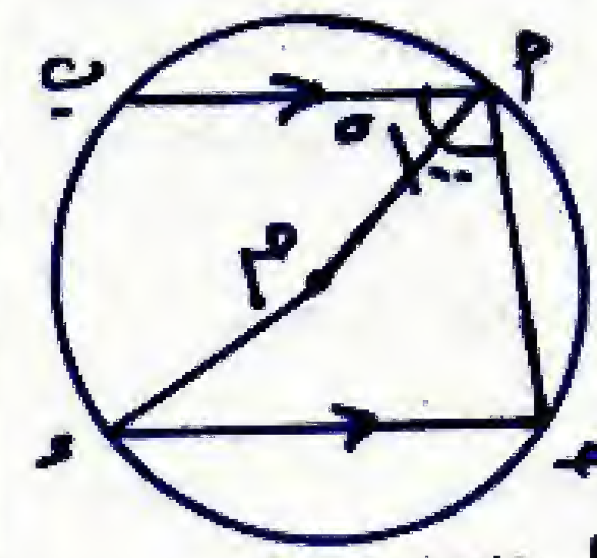
#

مثال ٦

ف(∠ب أ جـ) = ١٠٠°

أب // جـ ء أوجد

ف(∠أ م ء)



البرهان ∵ أب // جـ ء

∴ ف(∠جـ) = ١٨٠ − ١٠٠ = ٨٠° بالتداخل

∴ ف(∠أ م ء) = ٢ف(∠جـ) = ٢ × ٨٠ = ١٦٠°

لأنهم محيطية ومركزية مشتركتان في أء

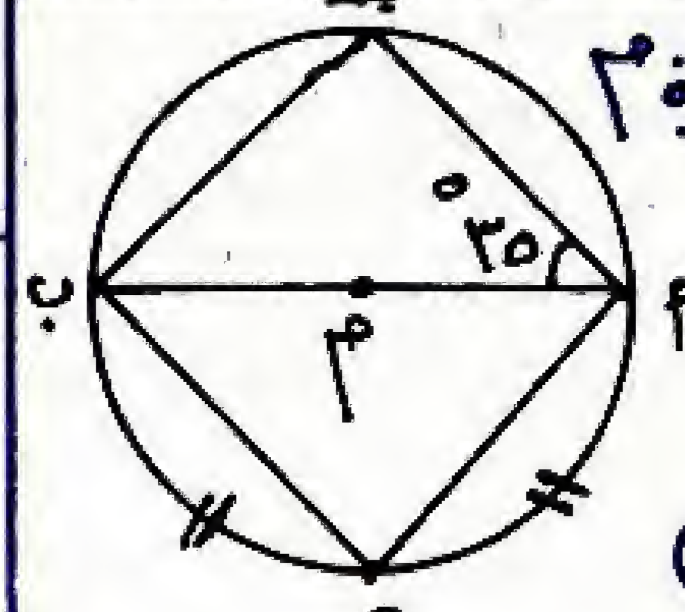
مثال ٧

أب قطر في الدائرة م

طول(أء) = طول(ب ء)

ف(∠جـ أ ب) = ٣٥°

أوجد بالبرهان ف(∠جـ ب ء)



البرهان ∵ أب قطر ∴ ف(∠أ جـ ب) = ٩٠° قائمة

لأنها محيطية مرسومة على القطر

∴ ف(∠أ ب جـ) = ١٨٠° − (٩٠° + ٣٥°) = ٥٥°

∵ ف(أء) = ف(ء ب) = $\frac{١٨٠}{٢}$ = ٩٠°

∴ ف(∠أ ب ء) = $\frac{١}{٢}$ ف(أء) = ٤٥°

لأنها محيطية تقابل أء يساوي نصفه

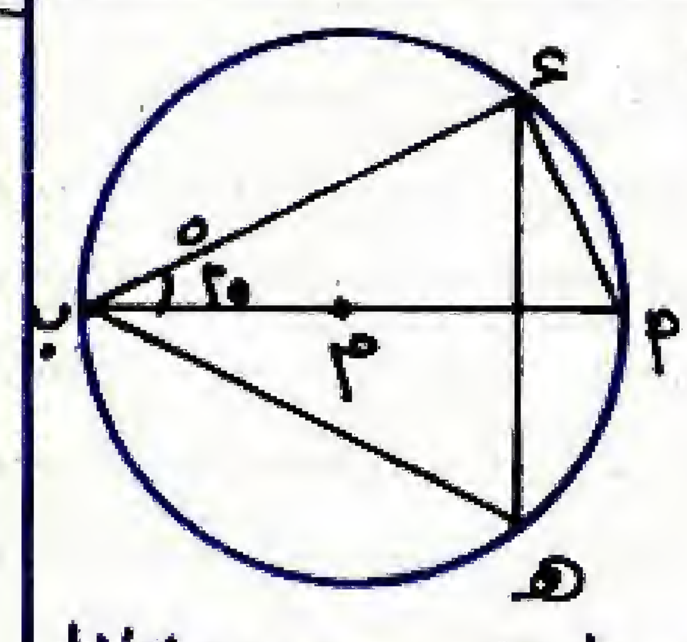
∴ ف(∠جـ ب ء) = ٥٥° + ٤٥° = ١٠٠° #

مثال ٨

أب قطر في الدائرة م

ف(∠جـ ب ء) = ٢٥°

أوجد ف(∠ء هـ ب) بالبرهان



البرهان ∵ أب قطر

∴ ف(∠أ ء ب) = ٩٠° محيطية مرسومة على القطر

∴ ف(∠ء أ ب) = ١٨٠° − (٢٥° + ٩٠°) = ٦٥°

∴ ف(∠ء أ ب) = ف(∠ء هـ ب) = ٦٥°

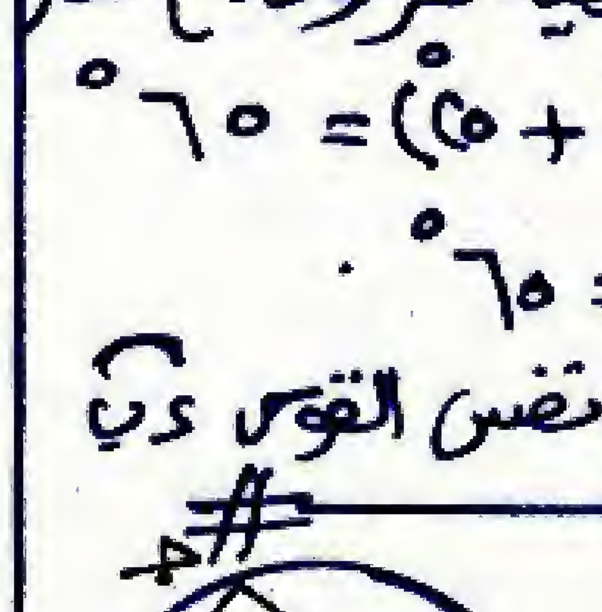
محيطيتان مرسومتان على نفس القوس ء ب

مثال ٩

أب = أجـ

اثبت أن

ف(∠أ هـ ب) = ف(∠أ هـ جـ)



البرهان ∵ أب = أجـ وترين

∴ ف(أب) = ف(أجـ) قوس = قوس

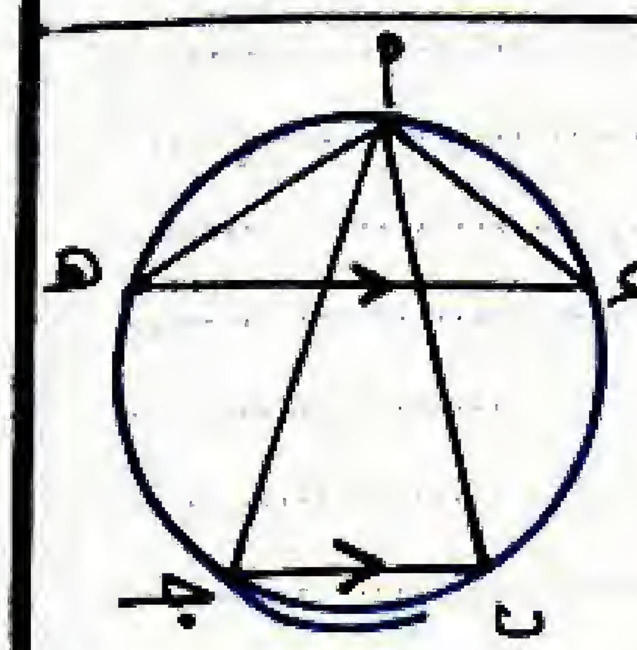
∴ ف(∠أ هـ ب) = ف(∠أ هـ جـ) #

لأنهم محيطيتان تقابلان أقواساً متساوية #

مثال ١٠

ءهـ // ب جـ

إثبت أن ف(∠ء أ جـ) = ف(∠ب أ هـ)



البرهان ∵ ءهـ // ب جـ

∴ ف(ء ب) = ف(هـ جـ)

∴ ف(∠ء أ ب) = ف(∠هـ أ جـ) محيطيتان على أقواس متساوية

بإضافة ف(∠ب أ جـ) للطرفين

∴ ف(∠ء أ جـ) = ف(∠هـ أ ب) #

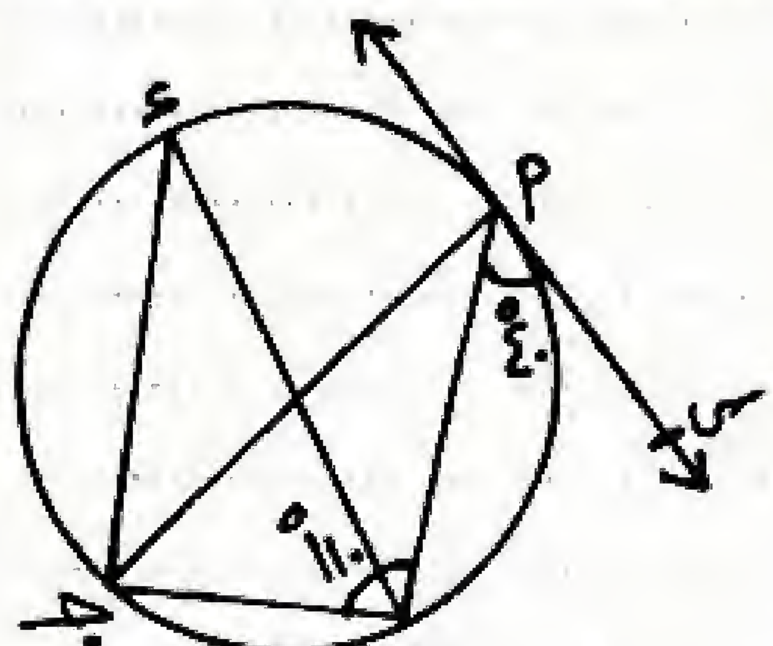
مثال ١١

أس مماس ،

ف(∠س أ ب) = ٤٠° ،

ف(∠أ ب جـ) = ١١٠°

أوجد ف(∠جـ ء ب)



البرهان ∵ ف(∠ب جـ أ) = ف(∠س أ ب) = ٤٠°

محيطية ومماسية مشتركتان في أب

في Δ أ ب جـ ف(∠ب أ جـ) = ١٨٠ − (١١٠ + ٤٠)

= ٣٠°

∴ ف(∠ب ء جـ) = ف(∠ب أ جـ) = ٣٠°

محيطيتان مرسومتان على نفس القوس ب جـ

مثال ١٣

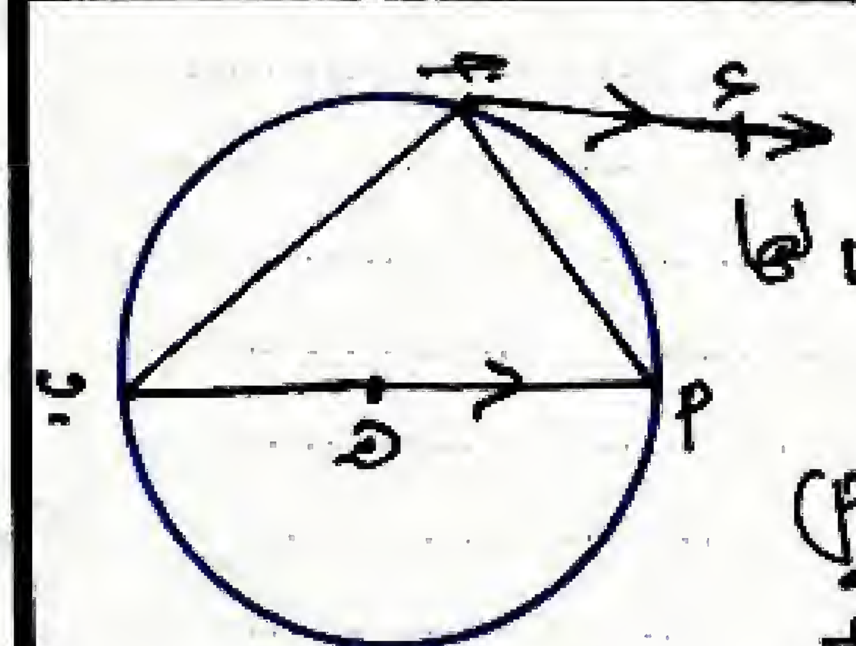
أب قطر في دائرة م

محيطها ٤٤ سم ، جـ ء مماس لها

عند جـ ، جـ ء // ب أ

أوجد مع البرهان (١) ف(∠ء جـ أ)

(٢) طول أجـ



البرهان ∵ جـ ء مماس // أب قطر

∴ ف(أجـ) = ف(جـ ب) = $\frac{١٨٠}{٢}$ = ٩٠°

∴ ف(∠ء جـ أ) المماسية = $\frac{١}{٢}$ ف(أجـ) = $\frac{١}{٢}$ × ٩٠ = ٤٥° (١) #

ف(أجـ) = ٩٠°

∴ طول أجـ = $\frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠}$ × المحيط ٢ π نق

= $\frac{٩٠}{٣٦٠}$ × ٤٤ = ١١ سم

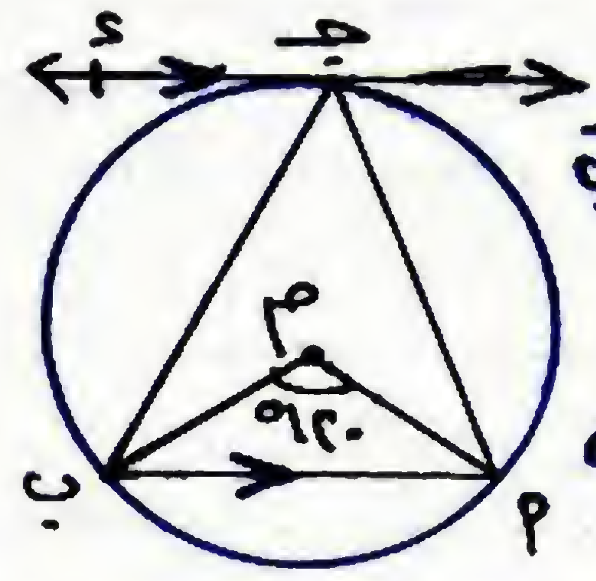
فكر $\sqrt{٦ + \sqrt{٦ + \sqrt{٦ + \sqrt{٦ + ٣}}}}$ = ------

(تمارين)

① $\overleftrightarrow{جـ ء}$ مماس ، $\overline{جـ ء}$ // $\overline{أب}$

ق(∠ أ م ب) = ١٢٠°

أثبت أن △ جـ أ ب متساوي الأضلاع

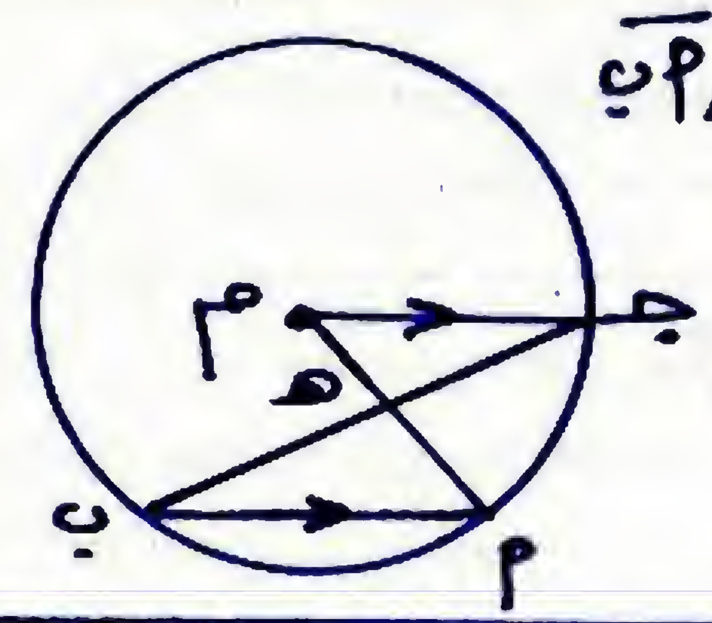


② $\overline{أب}$ وتر حيث $\overline{جـ م}$ // $\overline{أب}$

، $\overline{ب جـ}$ ∩ $\overline{أ م}$ = {هـ}

أثبت أن :

ب هـ > أ هـ



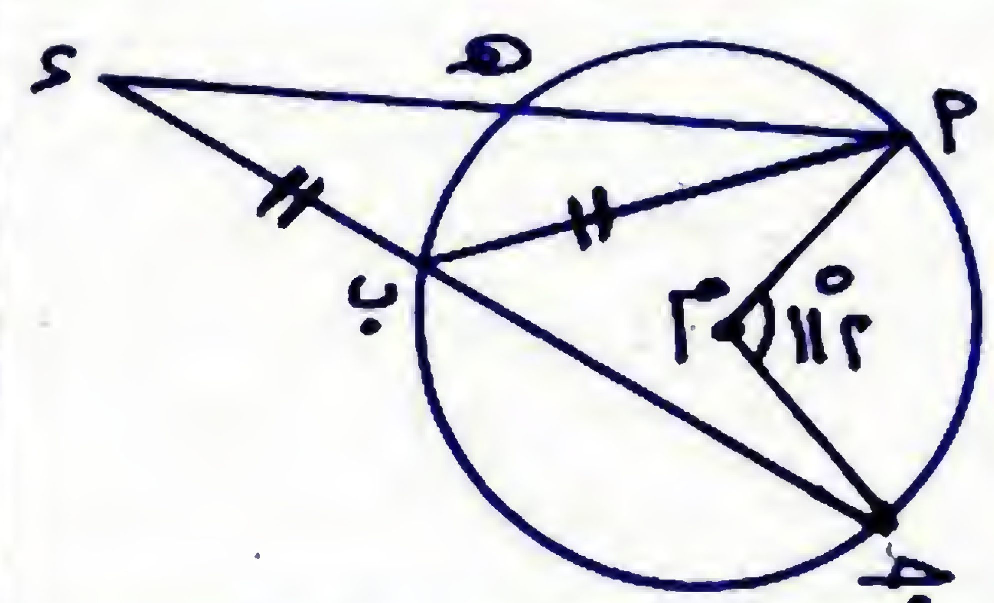
③ دائرة م

ق(∠ أ م جـ) = ١١٢°

، أ ب = ء ب ،

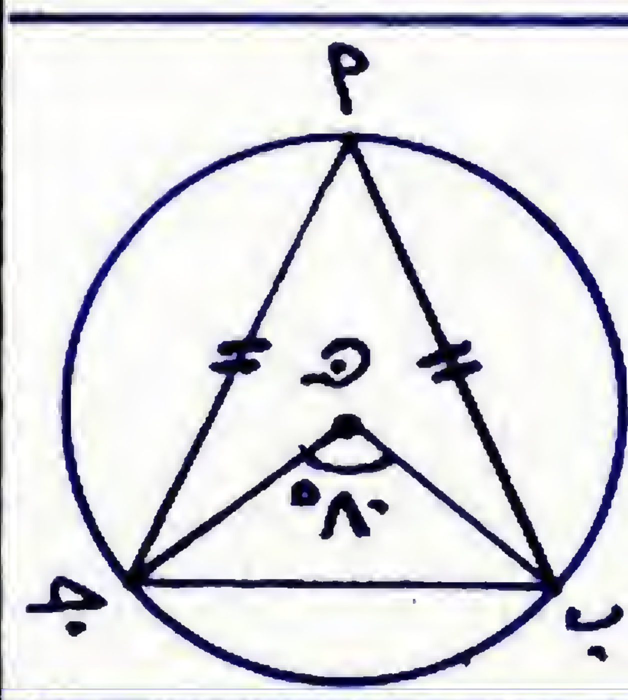
ب ∈ $\overline{ء جـ}$

أوجد ق(∠ ء)



④ أوجد ① ق(∠ أ ب جـ)

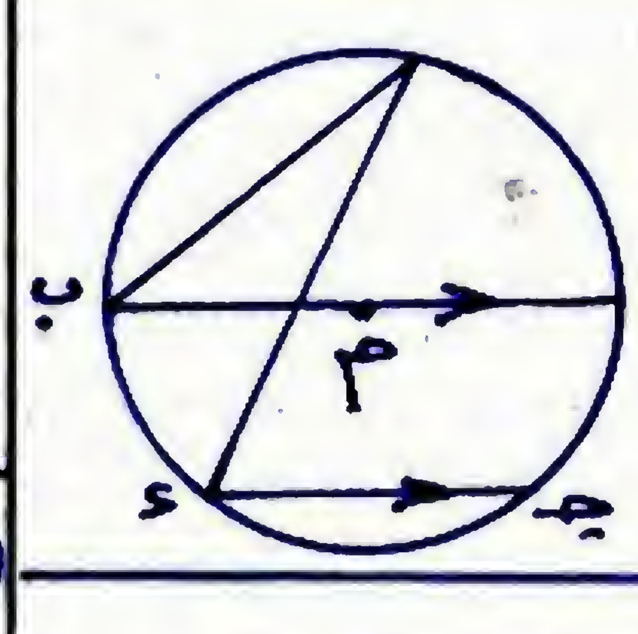
② ق($\overset{\frown}{ب جـ}$) الأكبر



⑤ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م

$\overline{أب}$ // $\overline{جـ ء}$ ، ق($\overset{\frown}{جـ ء}$) = ٨٠°

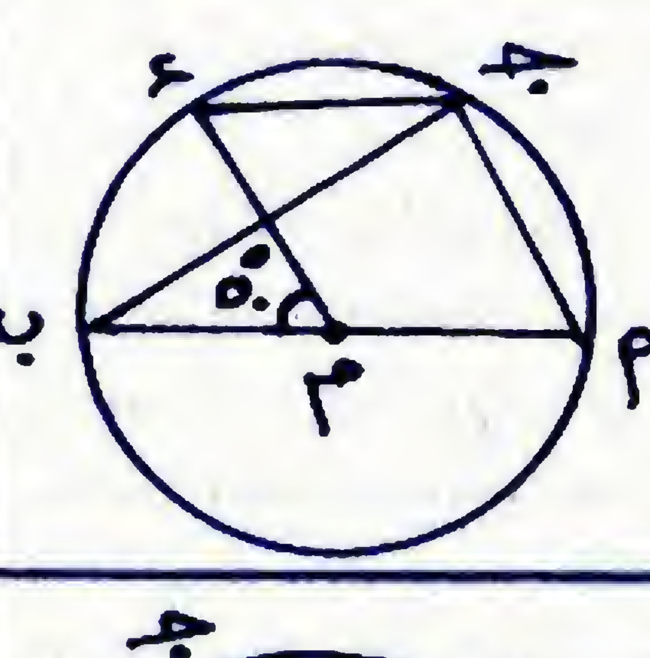
أوجد ق(∠ هـ)



⑥ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م

ق(∠ ب م ء) = ٥٠°

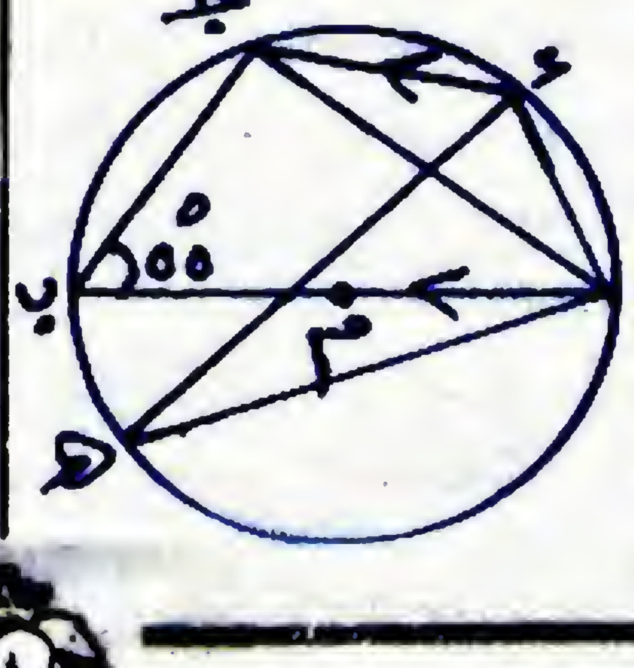
أوجد ق(∠ أ جـ ء)



⑦ $\overline{أب}$ قطر ، $\overline{ء جـ}$ // $\overline{أب}$

ق(∠ أ ب جـ) = ٥٥°

أوجد ق(∠ أ هـ ء)

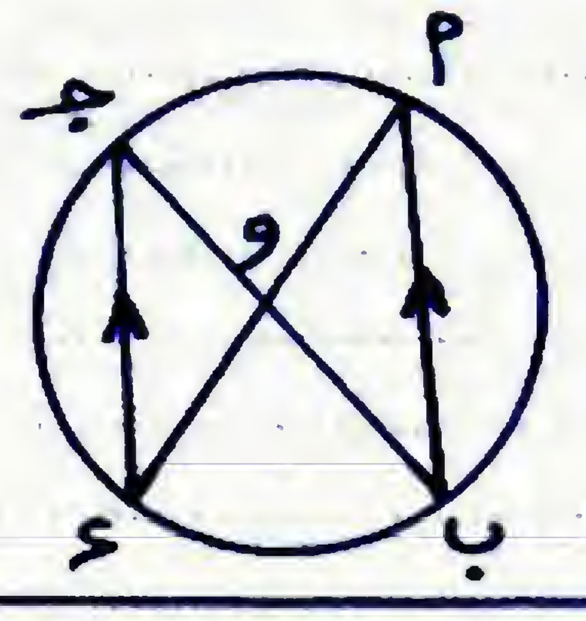


⑧ $\overline{أب}$ ، $\overline{جـ ء}$ وتران متوازيان

في الدائرة ،

$\overline{أ ء}$ ∩ $\overline{جـ ب}$ = {و}

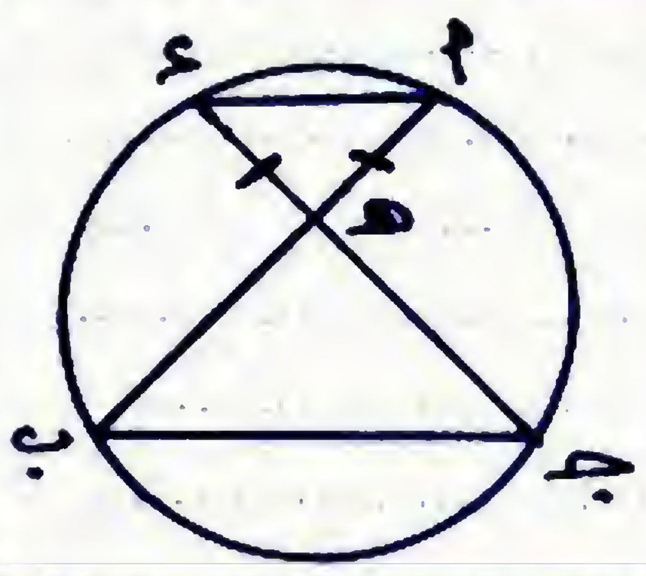
إثبت أن أ و = و ب



⑨ $\overline{أب}$ ∩ $\overline{جـ ء}$ = {هـ} ،

هـ أ = هـ ء إثبت أن

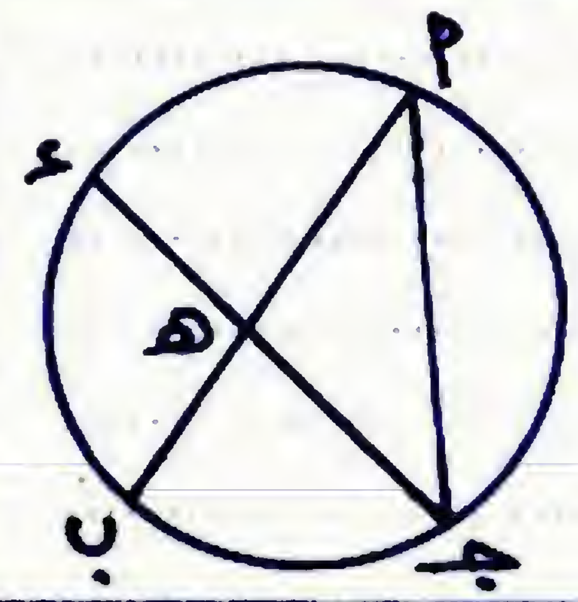
هـ ب = هـ جـ



⑩ أ ب = جـ ء ،

$\overline{أب}$ ∩ $\overline{جـ ء}$ = {هـ}

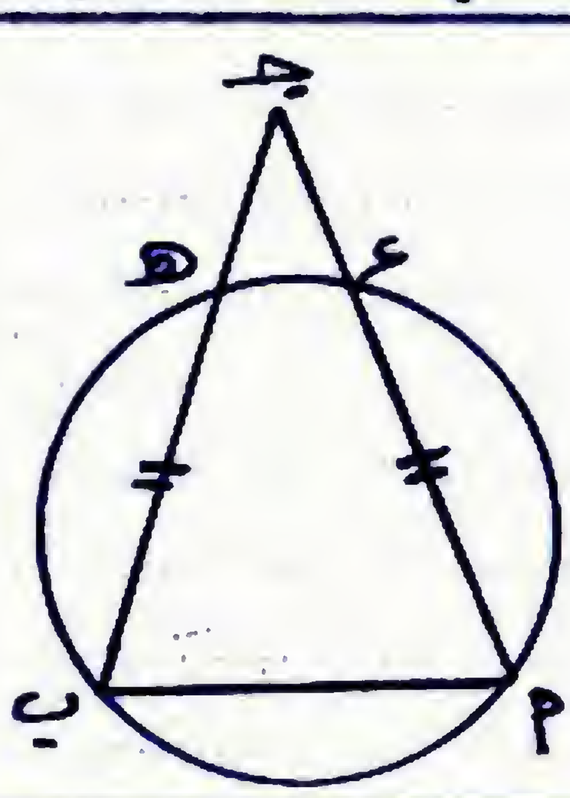
إثبت أن △ أ جـ هـ متساوي الساقين



⑪ أ ء = ب هـ ،

$\overleftrightarrow{أ ء}$ ∩ $\overleftrightarrow{ب هـ}$ = {جـ}

إثبت أن جـ ء = جـ هـ



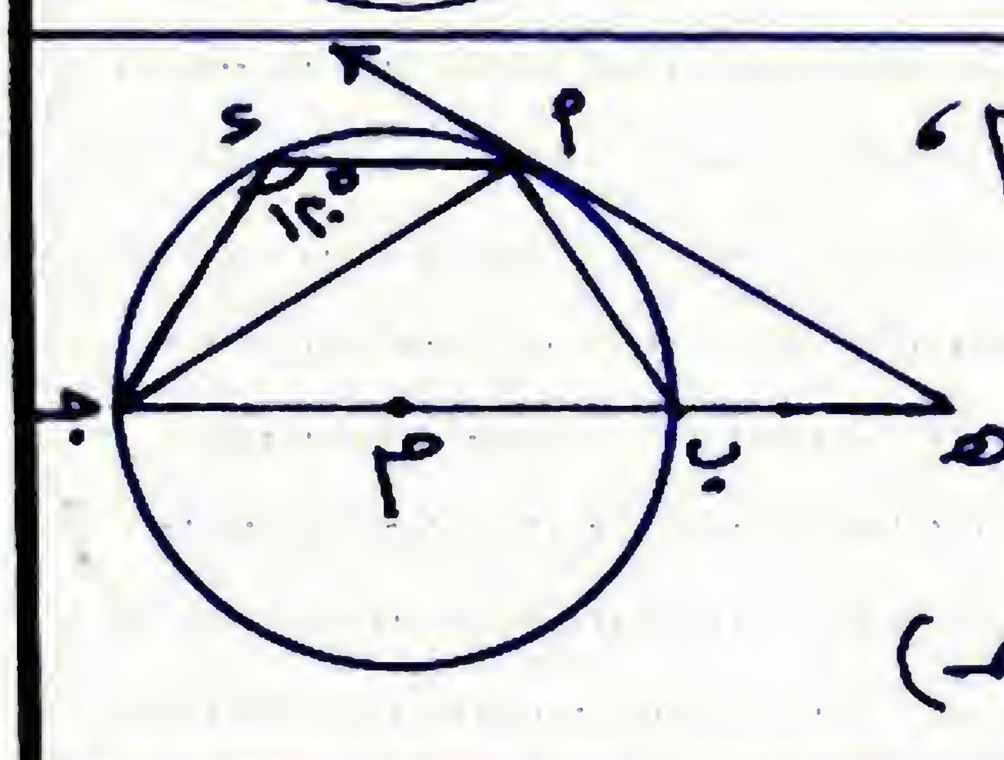
⑫ هـ أ مماس للدائرة م ،

ق(∠ أ ء جـ) = ١٢٠°

إثبت أن

① ب أ = ب هـ

② ق(∠ أ ب هـ) = ق(∠ هـ أ جـ)

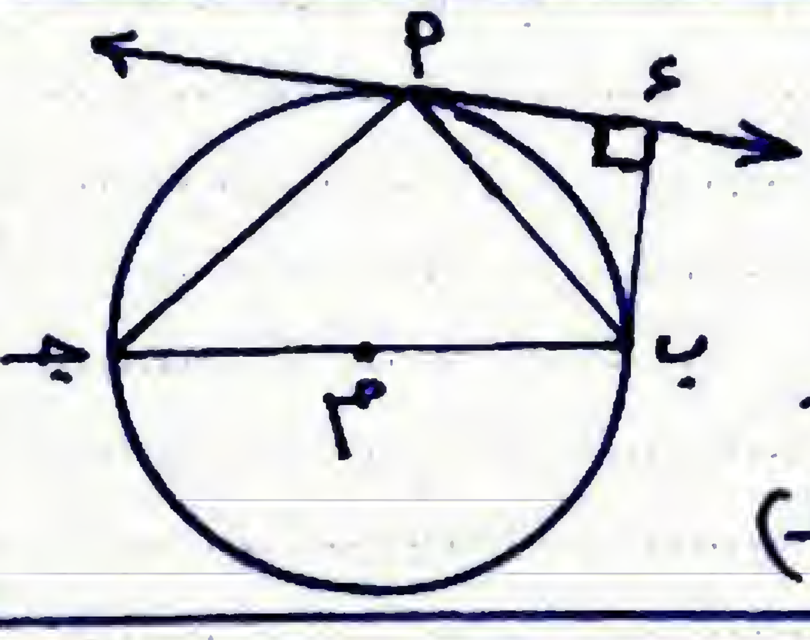


⑬ $\overleftrightarrow{أ ء}$ مماس للدائرة م

عند أ ، $\overline{ب جـ}$ قطر ،

$\overline{ب ء}$ ⊥ $\overleftrightarrow{أ ء}$ إثبت أن

ق(∠ أ ب ء) = ق(∠ أ جـ ب)

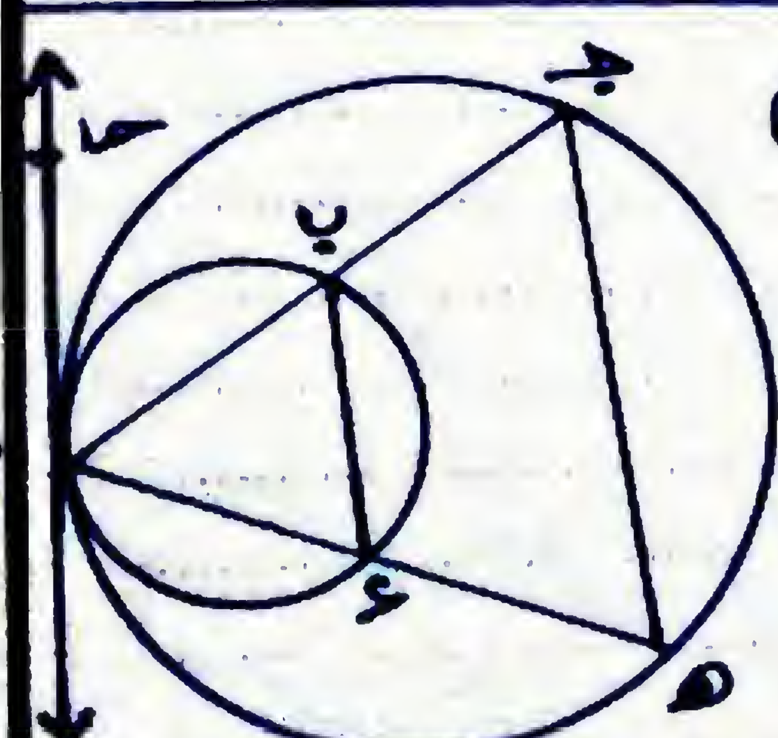


⑭ دائرتان متماستان من الداخل

في أ ، $\overleftrightarrow{أ س}$ مماس مشترك

إثبت أن

$\overline{ء ب}$ // $\overline{هـ جـ}$

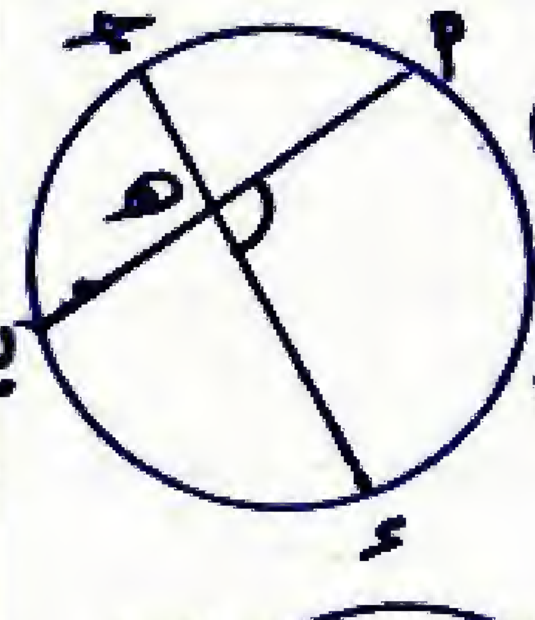


أ/ وليد محمد عكاشة
01002097866

٣ تمارين مشهورة

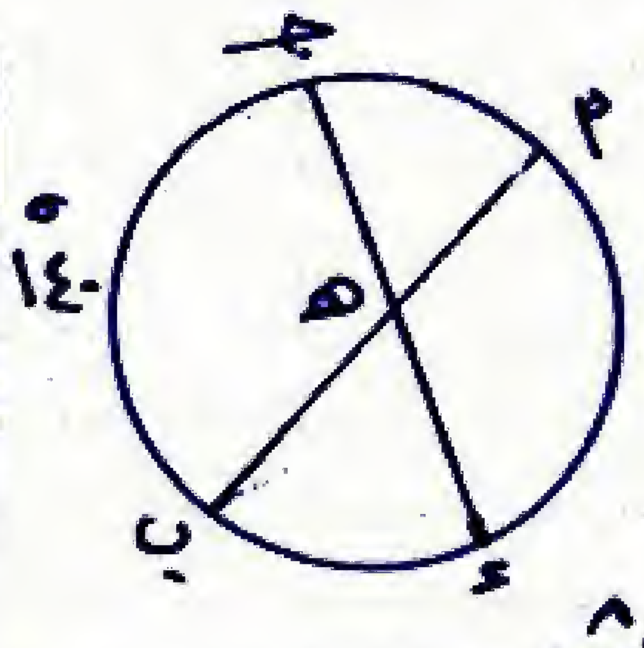
تمرين مشهور ①

إذا تقاطع وتران في نقطة داخل دائرة، فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوي نصف مجموع قياسي القوسين المقابلين لها.



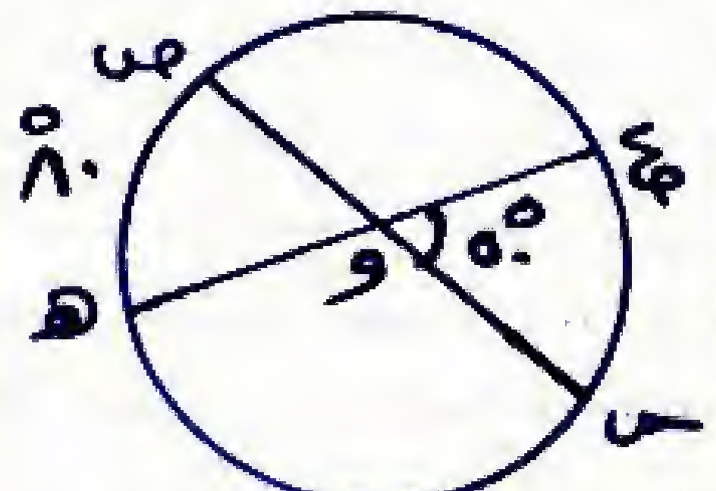
ق(∠هـ) = ½ ق(أ د) + ½ ق(جـ ب)

قياس القوس = ضعف الزاوية − القوس المقابل



ق(∠هـ) = ...

ق(∠هـ) = ٦٠ + ٧٠ = ١٣٠°



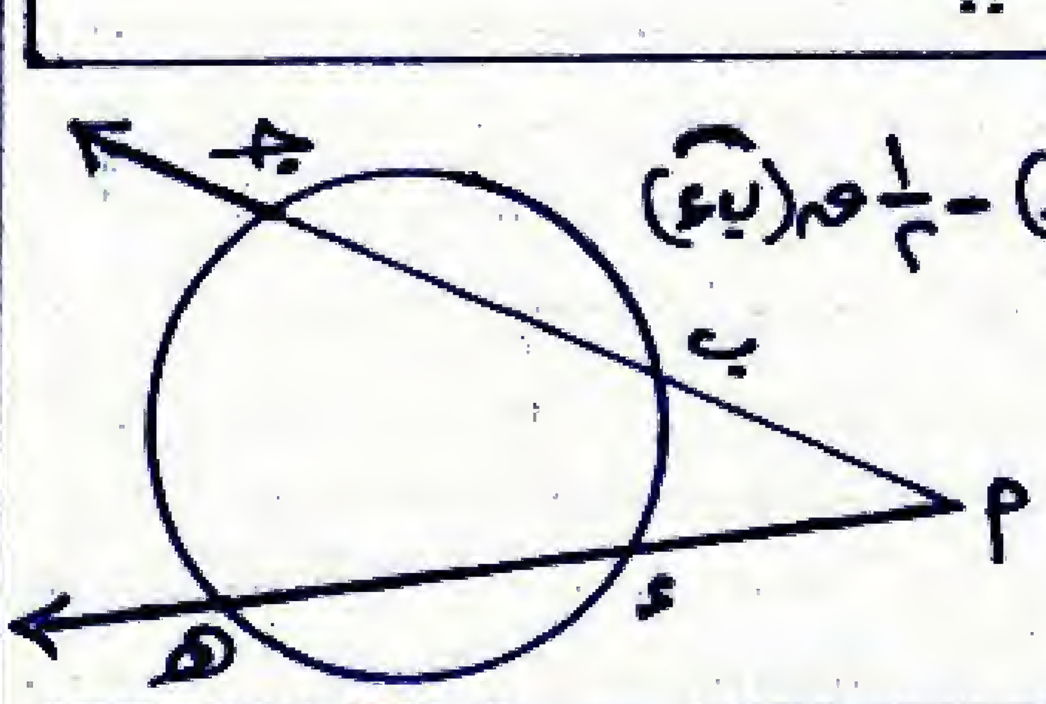
ق(س ص) = ...

ق(س ص) = ١٠٠ − ٨٠ = ٢٠°

تمرين مشهور ②

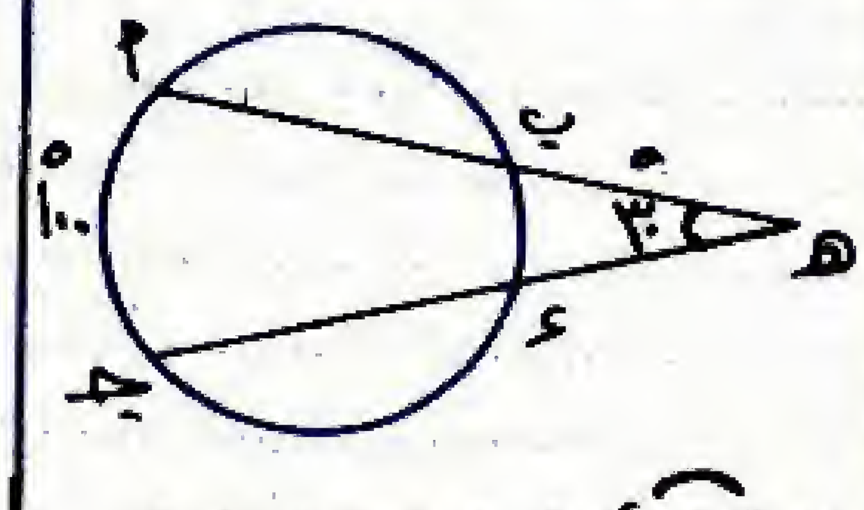
إذا تقاطع شعاعان حاملان لوترين في دائرة خارجها، فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوي نصف قياس القوس الأكبر مطروحاً منه نصف قياس القوس الأصغر اللذين يحصرهما ضلعا هذه الزاوية.

ق(∠أ) = ½ ق(جـ هـ) − ½ ق(ب د)



قياس الزاوية = ½ القوس الأكبر − ½ القوس الأصغر
الأكبر = ضعف الزاوية + القوس الأصغر
القوس الأصغر = القوس الأكبر − ضعف قياس الزاوية

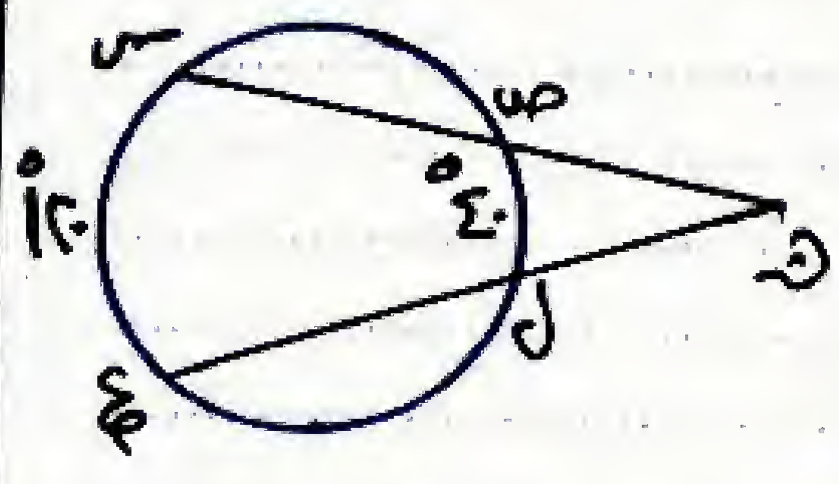
إذا كان $3^{س} = 5$ فإن $3^{س+1} = ...$



ق(ب د) = ...

= الأكبر − ضعف الزاوية

= ١٠٠ − ٦٠ = ٤٠°



ق(∠هـ) = ...

الزاوية = ½ الأكبر − ½ الأصغر

= ٦٠ − ٢٠ = ٤٠°

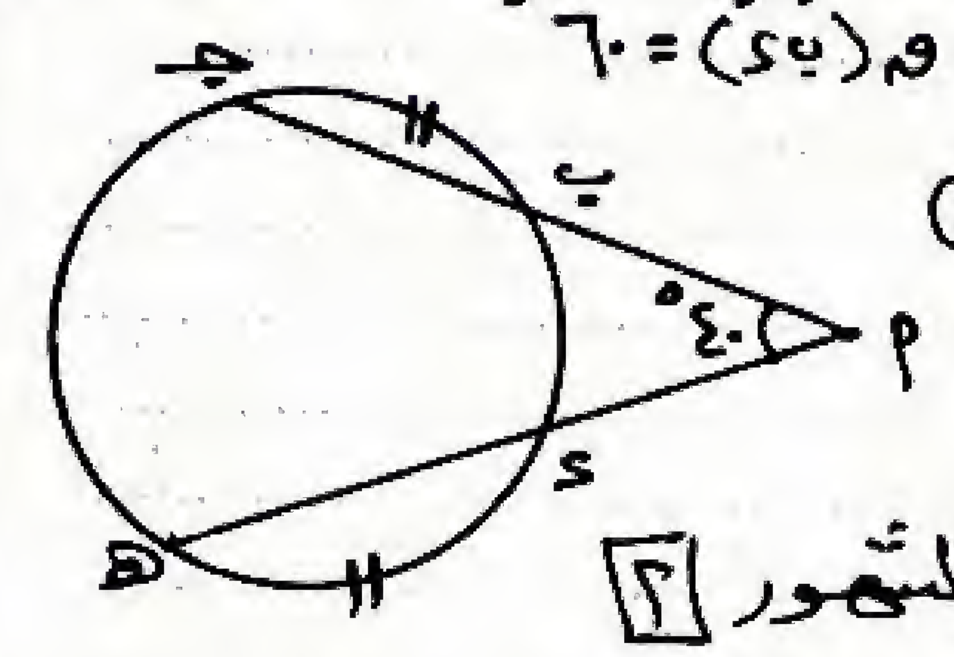
مثال ①

ق(∠أ) = ٤٠°، ق(ب د) = ٦٠°

، ق(ب جـ) = ق(د هـ)

أوجد ① ق(هـ جـ)

② ق(ب جـ)



البرهان من التمرين المشهور ②

ق(جـ هـ) الأكبر = ضعف الزاوية + الأصغر

= ٨٠ + ٦٠ = ١٤٠° # ①

∵ قياس الدائرة = ٣٦٠°

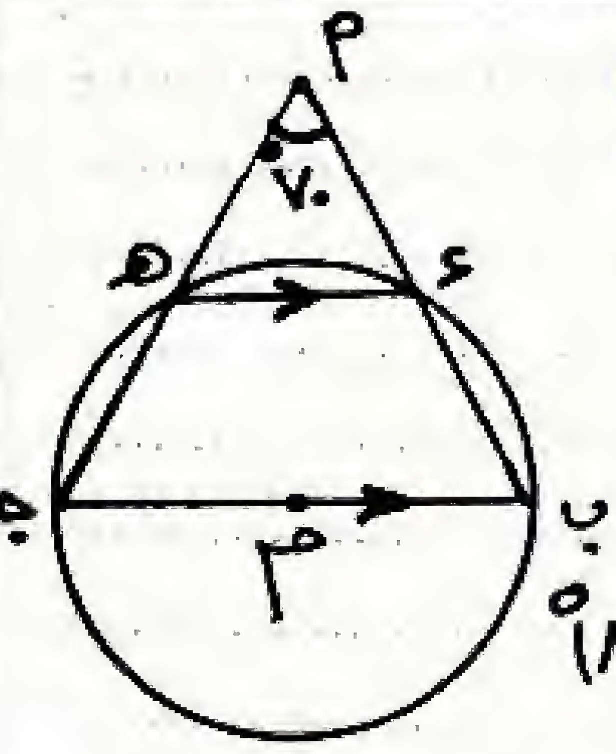
∴ ق(ب جـ) = $\frac{٣٦٠ - (١٤٠ + ٦٠)}{٢}$ = ٨٠° # ②

مثال ②

ب جـ قطر في الدائرة م

، ق(∠أ) = ٧٠°، د هـ // ب جـ

أوجد ق(ب د)



البرهان ∵ ب جـ قطر

∴ ق(ب جـ) الأكبر نصف دائرة = ١٨٠°

من التمرين المشهور ②

ق(د هـ) الأصغر = الأكبر − ضعف الزاوية

= ١٨٠ − ١٤٠ = ٤٠°

∵ ق(ب د جـ) نصف دائرة = ١٨٠°

∵ د هـ // ب جـ ∴ ق(د ب) = ق(هـ جـ)

∴ ق(ب د) = $\frac{١٨٠ - ٤٠}{٢}$ = ٧٠° #

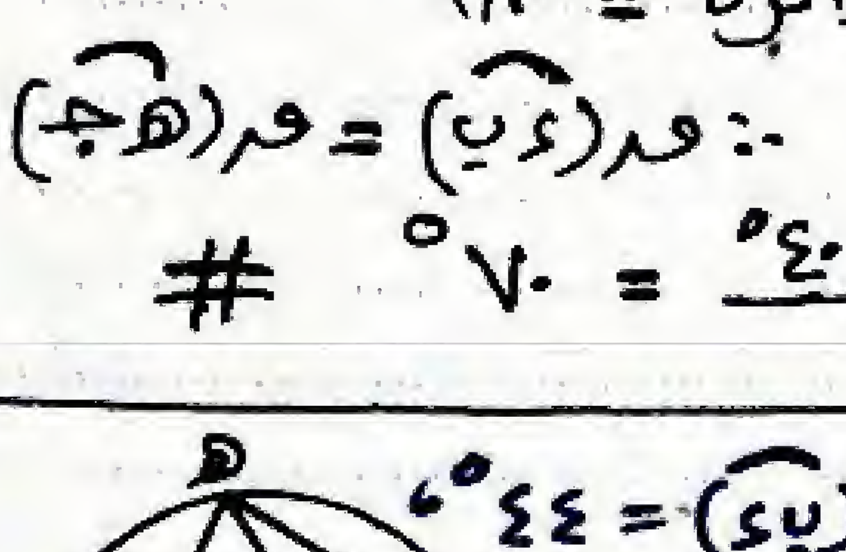
مثال ③

ق(∠أ) = ٣٠°، ق(ب د) = ٤٤°

ق(∠د جـ هـ) = ٤٨° أوجد

① ق(جـ هـ)

② ق(ب جـ)



البرهان من التمرين المشهور ②

∴ ق(جـ هـ) = ضعف ق(∠أ) + ق(د ب) الأصغر

= ٦٠ + ٤٤ = ١٠٤° # ①

∵ ق(∠ د جـ هـ) محيطية تقابل القوس د هـ

∴ ق(د هـ⌒) = ٢ × ٤٨ = ٩٦°

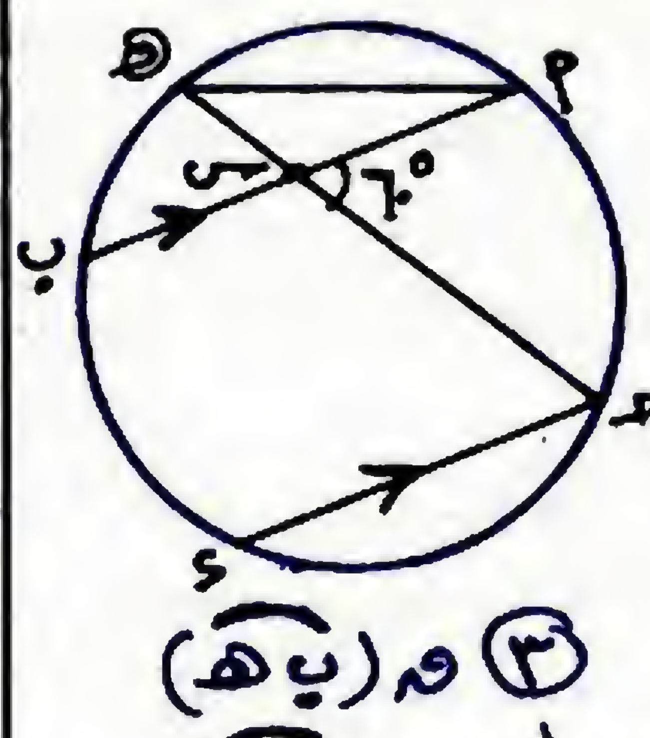
∵ قياس الدائرة = ٣٦٠°

∴ ق(ب جـ⌒) = ٣٦٠° − (٩٦° + ١٠٤° + ٤٤°)

= ١١٦° #

مثال ٤ أب // جـ د ، ق(∠ أ س جـ) = ٦٠° ، ق(أ جـ⌒) = ٨٠°

أوجد بالبرهان



① ق(∠ أ هـ جـ) ② ق(ب د⌒) ③ ق(ب هـ⌒)

البرهان ∵ ق(∠ أ هـ جـ) = ½ ق(أ جـ⌒)

= ٤٠° محيطية تقابل أ جـ # ①

∵ أب // جـ د ∴ ق(أ جـ⌒) = ق(ب د⌒)

= ٨٠° # ②

من التمرين المشهور الأول

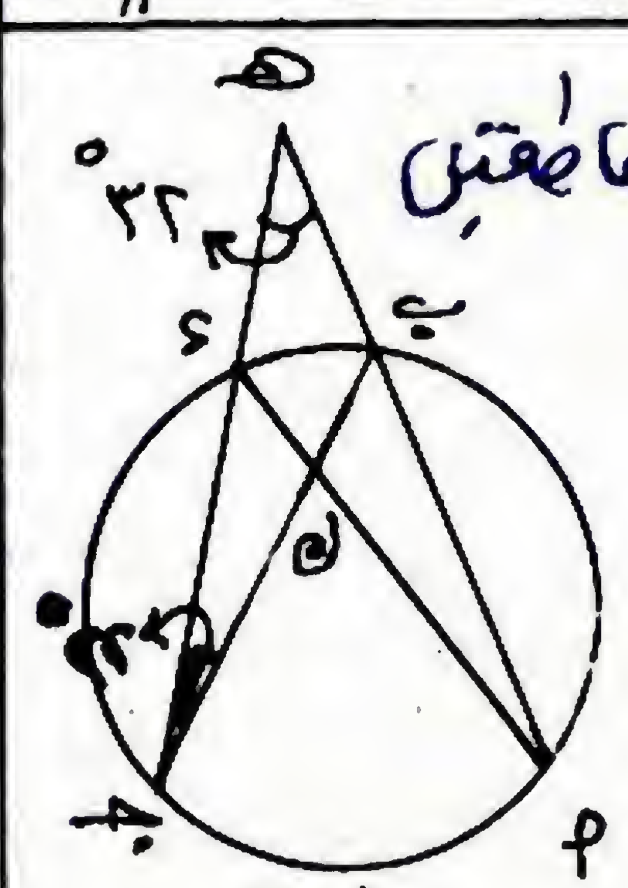
ق(هـ ب⌒) = ٢ ق(∠ أ س جـ) − ق(أ جـ⌒)

= ١٢٠° − ٨٠° = ٤٠° # ③

مثال ٥ أد ، ب جـ وتران متقاطعان

بحيث ق(∠ جـ) = ٢٢° ، ق(∠ هـ) = ٣٢° أوجد

ق(∠ أ م جـ)



البرهان

∵ ق(∠ ب جـ د) = ½ ق(ب د⌒) محيطية

∴ ق(ب د⌒) = ٢ × ٢٢ = ٤٤°

من التمرين المشهور ②

ق(أ جـ⌒) = ٢ × ٣٢ + ق(ب د⌒)

= ٦٤ + ٤٤ = ١٠٨°

من التمرين المشهور ①

ق(∠ أ م جـ) = ½ ق(ب د⌒) + ½ ق(أ جـ⌒)

= ٢٢ + ٥٤ = $\boxed{٧٦}$° #

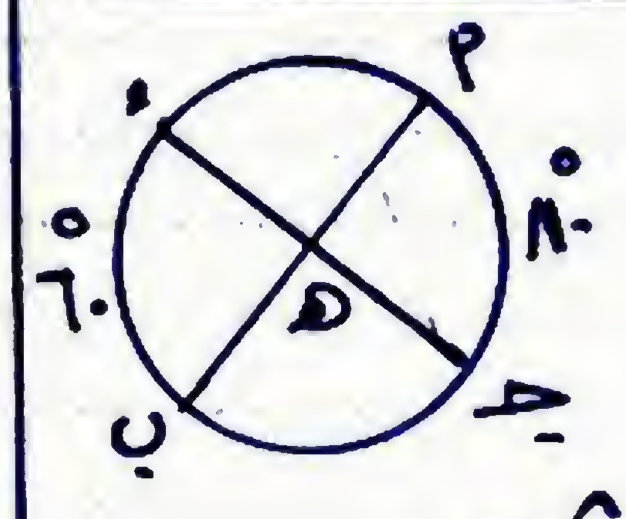
فكر

٤ جا ٣٠ = ...

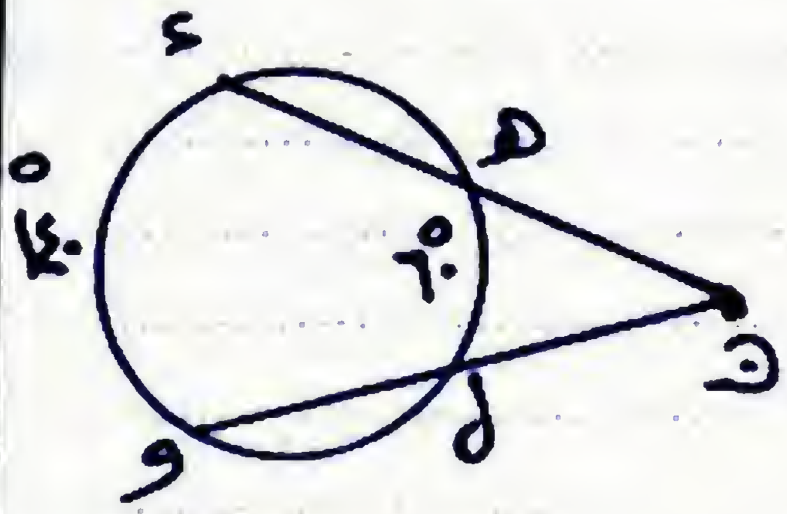
(تمارين)

(على التمارين المشهورة)

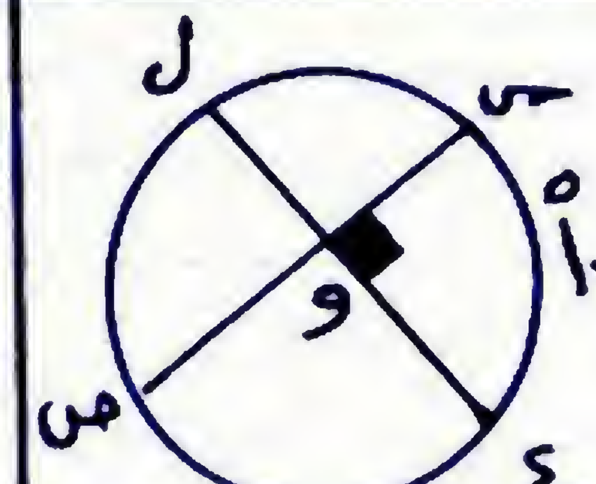
① أكمل ما يأتي



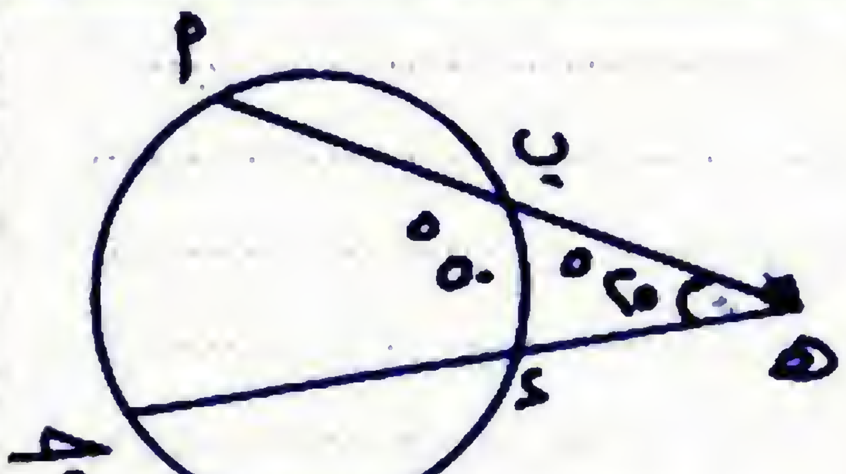
ق(∠ أ هـ جـ) = ...



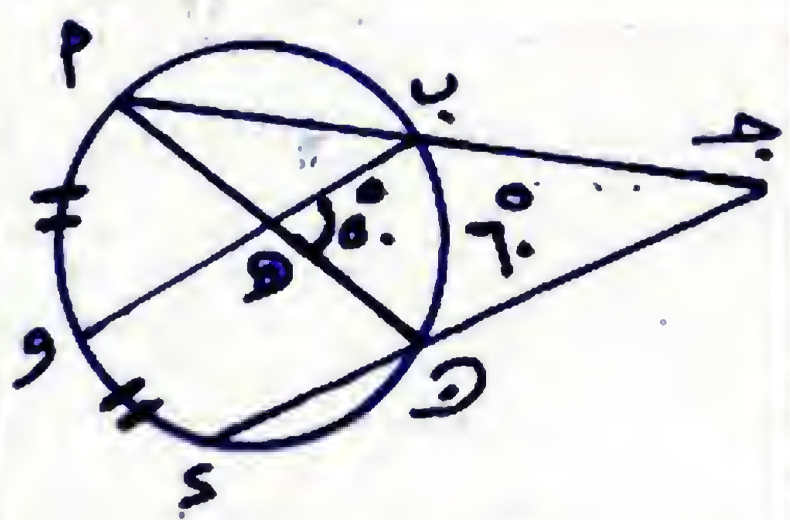
ق(∠ ن) = ...



ق(ل م ع⌒) = ...



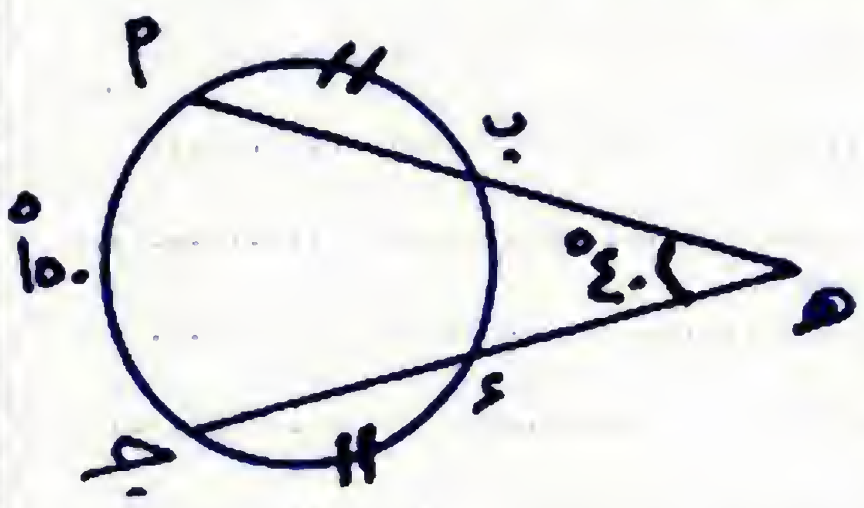
ق(أ جـ⌒) = ...



ق(∠ أ ب و) = ...

ق(∠ أ ن د) = ...

ق(∠ جـ) = ...



ق(ب د⌒) = ...

ق(أ ب⌒) = ...

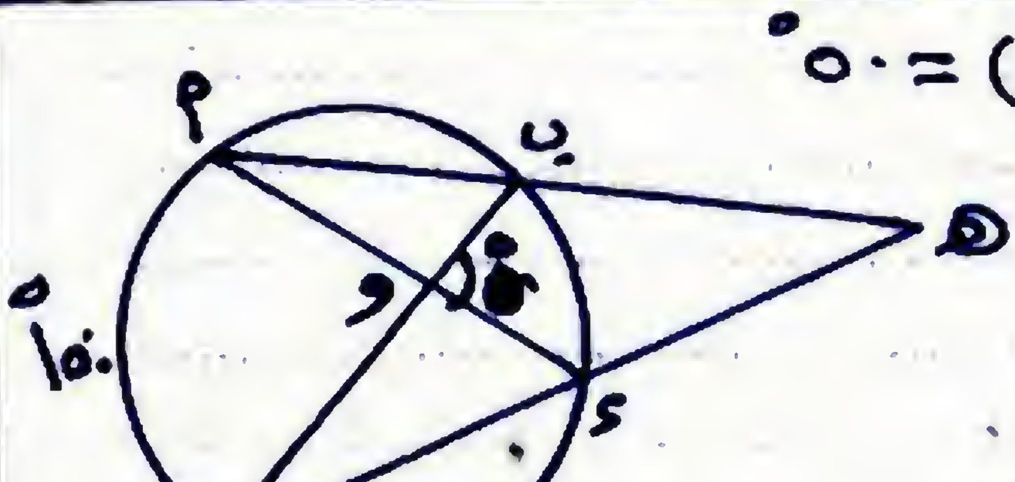
مثال ② ق(∠ ب و د) = ٥٠°

ق(أ جـ⌒) = ١٥٠° ،

① أوجد ق(ب د⌒)

② أوجد ق(∠ ب أ د)

③ أوجد ق(∠ هـ)



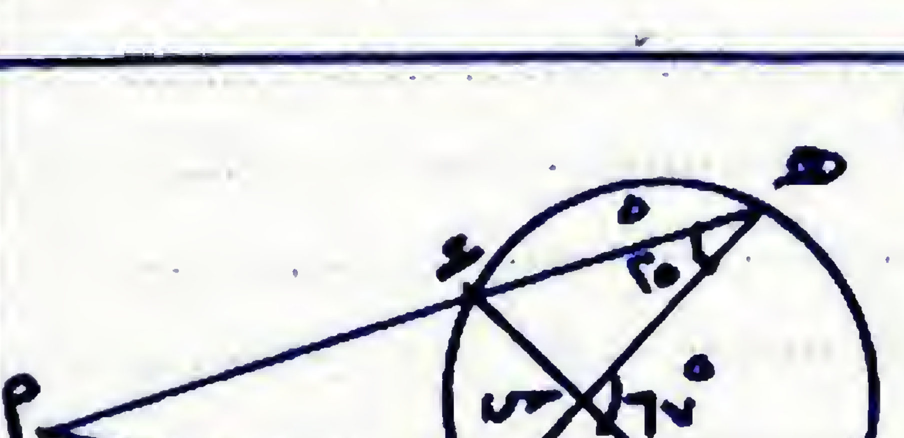
مثال ③ ق(∠ هـ) = ٢٥°

ق(∠ هـ س جـ) = ٦٧°

اثبت أن

ق(∠ أ ب هـ) = ق(∠ أ د جـ)

= ١٣٨°

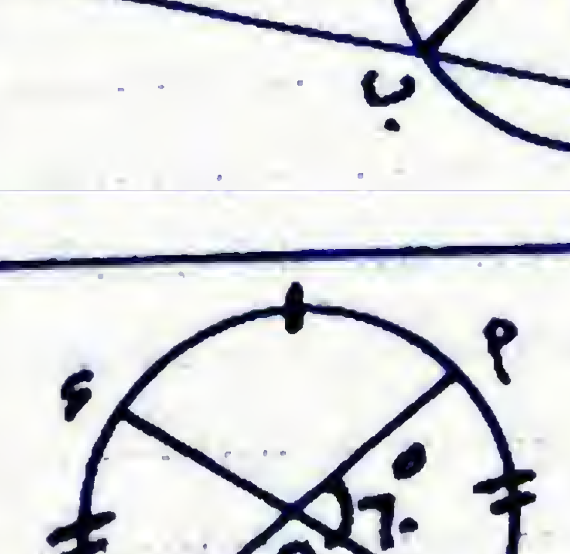


مثال ④ ق(أ جـ⌒) = ق(د ب⌒)

ق(أ د⌒) = ق(جـ ب⌒) ،

ق(∠ أ هـ جـ) = ٦٠°

أوجد ق(أ د⌒)



أ/ وليد محمد
01002097866

الدرس الرابع

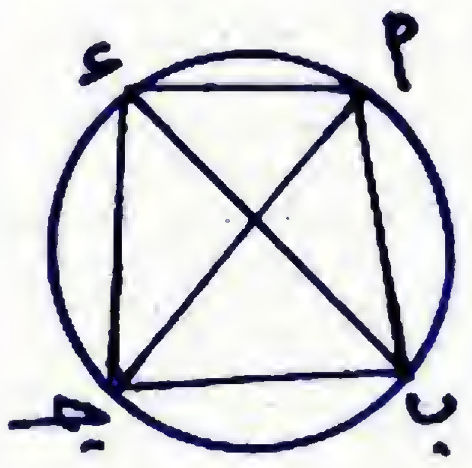
[الشكل الرباعى الدائرى]

هو شكل رباعى جميع رؤوسه تقع على دائرة واحدة

⪡ المستطيل والمربع وشبه المنحرف المتساوى الساقين أشكال رباعية دائرية بينما متوازى الأضلاع والمعين وشبه المنحرف الغير متساوى الساقين ليست أشكالاً رباعية دائرية

خواص الشكل الرباعى الدائرى

[١] كل زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها تكونان متساويتان فى القياس



مثلاً

ق(أ ب̂ د) = ق(أ جـ̂ د)

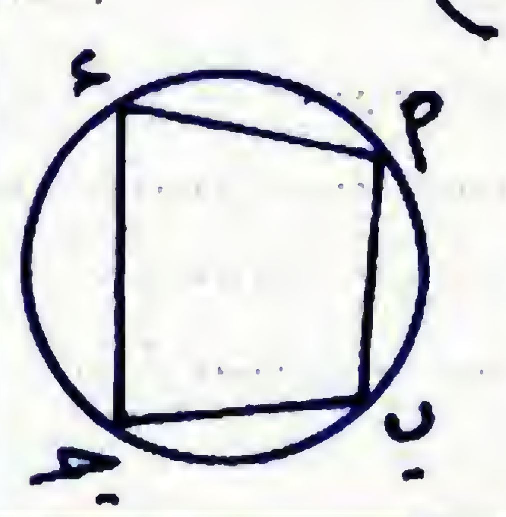
مرسومتان على القاعدة أ د

وأيضاً: ق(ب أ̂ جـ) = ق(ب د̂ جـ)

مرسومتان على القاعدة ب جـ وهكذا

⪡ الزاويتان المرسومتان على قاعدة واحدة وفى جهتين مختلفتين منها متكاملتان

[٢] كل زاويتان متقابلتان متكاملتان (مجموع قياسهم ١٨٠°)

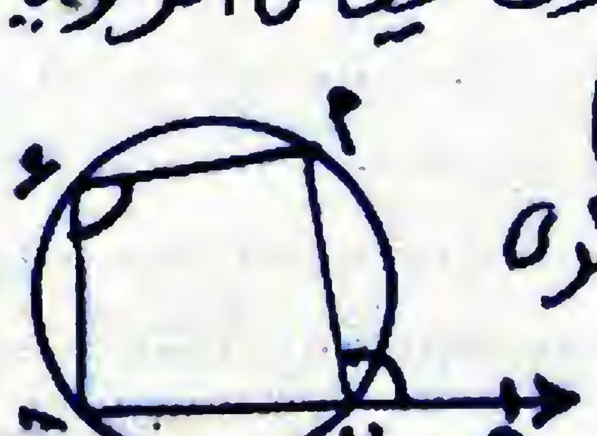


أ ب جـ د رباعى دائرى

فإن ق(أ̂) + ق(جـ̂) = ١٨٠°

ق(ب̂) + ق(د̂) = ١٨٠°

[٣] قياس الزاوية الخارجة عند أى رأس من رؤوس الرباعى الدائرى تساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها



د أ ب هـ خارجة عن الرباعى الدائرى

∴ ق(أ ب̂ هـ) = ق(د̂)

متى يكون الشكل الرباعى دائرياً :-

لإثبات أن الشكل الرباعى دائرى يجب أن نثبت إحدى الخواص الآتية :

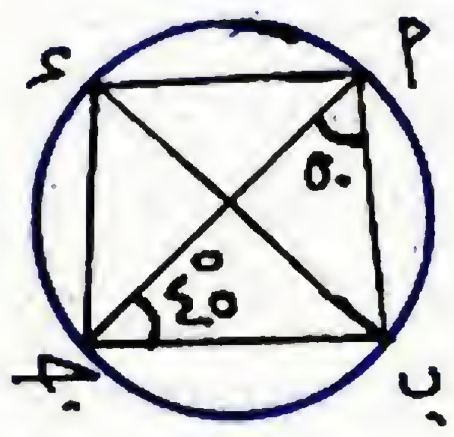
[١] إذا وُجدت نقطة فى مستوى الشكل تكون على أبعاد متساوية من رؤوسه

[٢] إذا وُجدت زاويتان متساويتان فى القياس ومرسومتان على ضلع من أضلاعه كقاعدة وفى جهة واحدة من هذه القاعدة

[٣] إذا وُجدت زاويتان متقابلتان متكاملتان (مجموعهم = ١٨٠°)

[٤] إذا وُجدت زاوية خارجة عند أى رأس من رؤوسه قياسها يساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها.

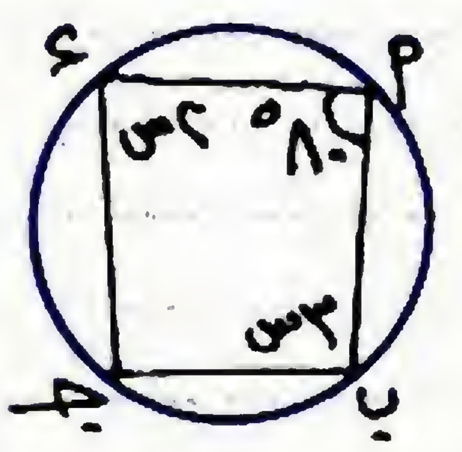
أ ب جـ د شكل رباعى دائرى



ق(ب د̂ جـ) = ... °

ق(ب د̂ م) = ... °

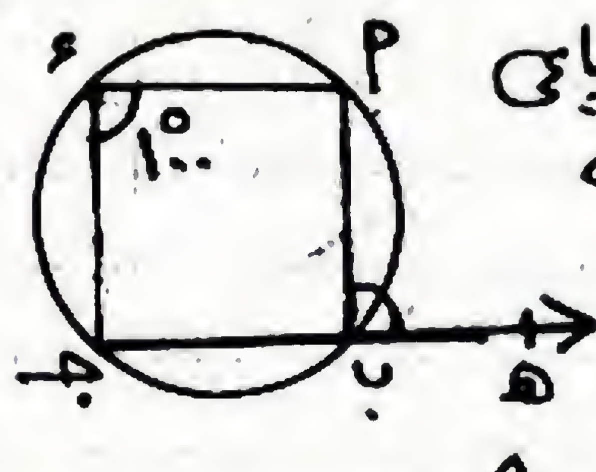
أ ب جـ د رباعى دائرى



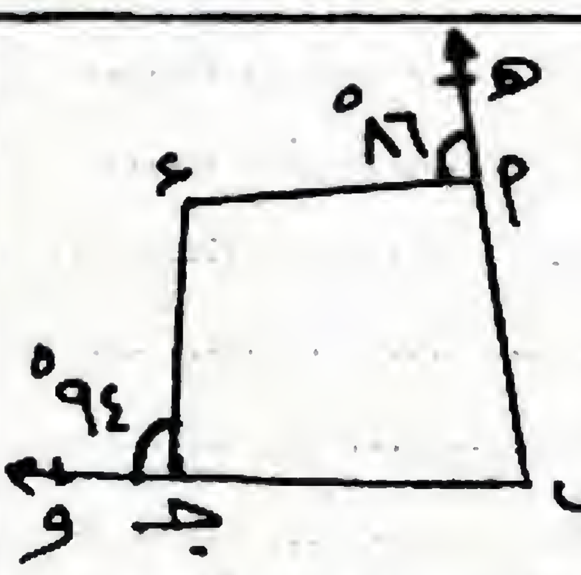
ق(هـ̂) = ... °

س = ... °

أ ب جـ د رباعى دائرى



ق(أ ب̂ هـ) = ...



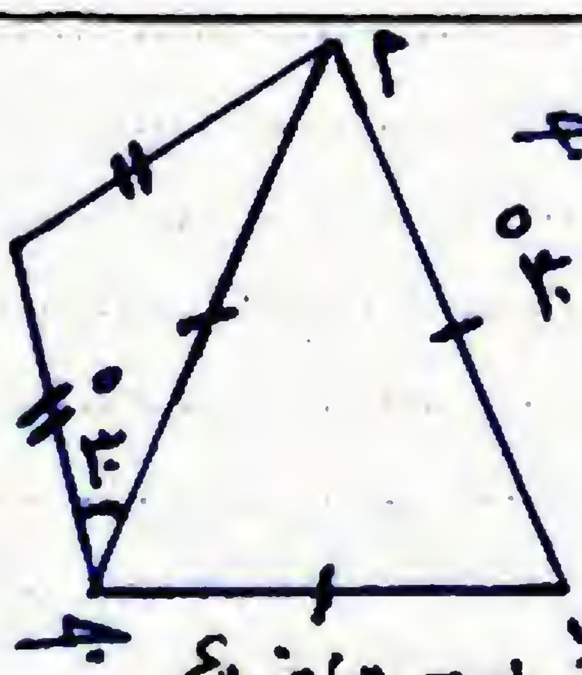
إثبت أن أ ب جـ د رباعى دائرى

مثال [١] أ ب = ب جـ = أ جـ

، أ د = د جـ ، ق(أ جـ̂ د) = ٣٠°

إثبت أن

أ ب جـ د رباعى دائرى



البرهان ∵ Δ أ ب جـ متساوى الأضلاع

∴ ق(ب̂) = ٦٠°

فى Δ أ د جـ المتساوى الساقين

ق(د أ̂ جـ) = ق(أ جـ̂ د) = ٣٠ ∴ ق(د̂) = ١٨٠ − ٦٠ = ١٢٠°

∴ ق(ب̂) + ق(د̂) = ٦٠° + ١٢٠° = ١٨٠° متقابلتان متكاملتان

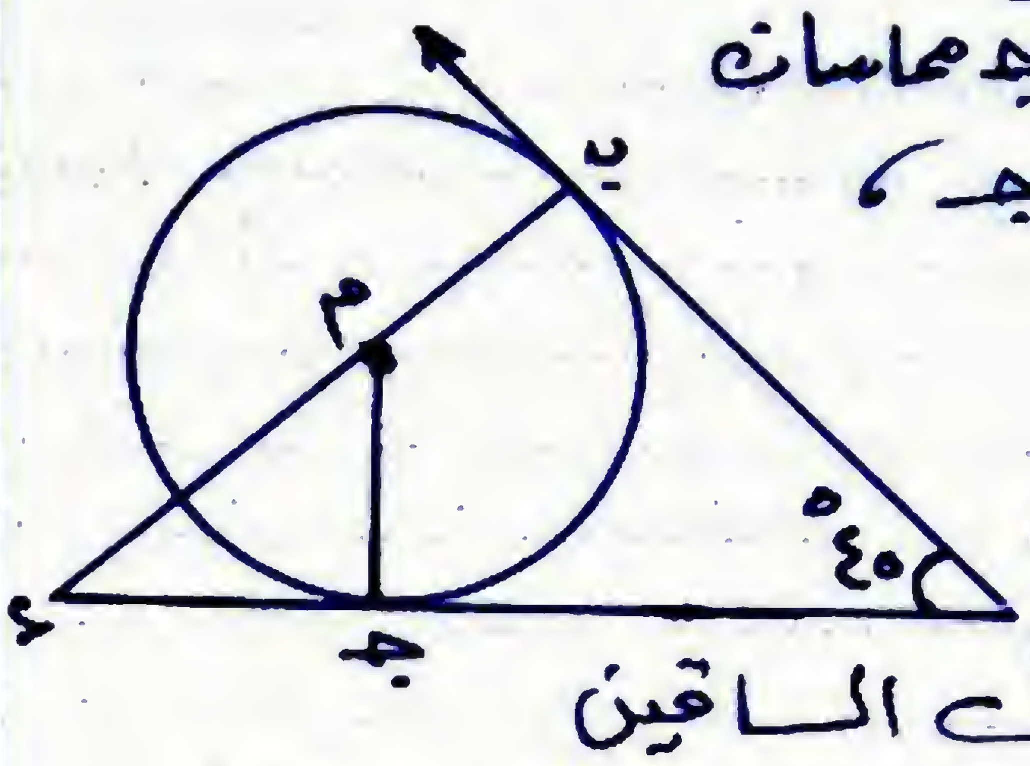
∴ أ ب جـ د رباعى دائرى #

مثال ② $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{أجـ}$ مماسان للدائرة عند ب ، جـ ، ق(أ̂) = ٤٥°

إثبت أن:

① أ ب م جـ رباعي دائري

② △ م جـ د متساوي الساقين



البرهان ∵ $\overrightarrow{أب}$ مماس ، $\overline{مب}$ نصف القطر

∴ ق(أ ب̂ م) = ٩٠°

∵ $\overrightarrow{أجـ}$ مماس ، $\overline{مجـ}$ نصف القطر

∴ ق(أ جـ̂ م) = ٩٠°

∴ ق(أ ب̂ م) + ق(أ جـ̂ م) = ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠°

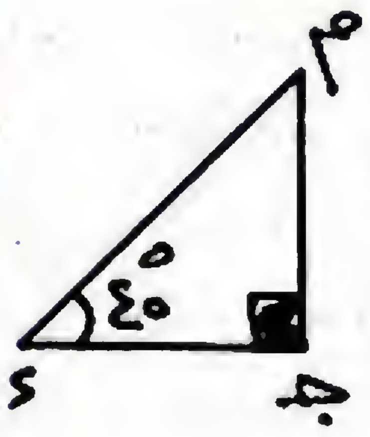
متقابلتان متكاملتان

∴ أ ب م جـ رباعي دائري # ①

في △ أ ب د ق(د̂) = ١٨٠° − (٤٥° + ٩٠°)

= ١٨٠ − ١٣٥ = ٤٥°

في △ م جـ د



ق(جـ م̂ د) = ١٨٠° − (٩٠° + ٤٥°) = ٤٥°

∴ ق(جـ م̂ د) = ق(جـ د̂ م) = ٤٥°

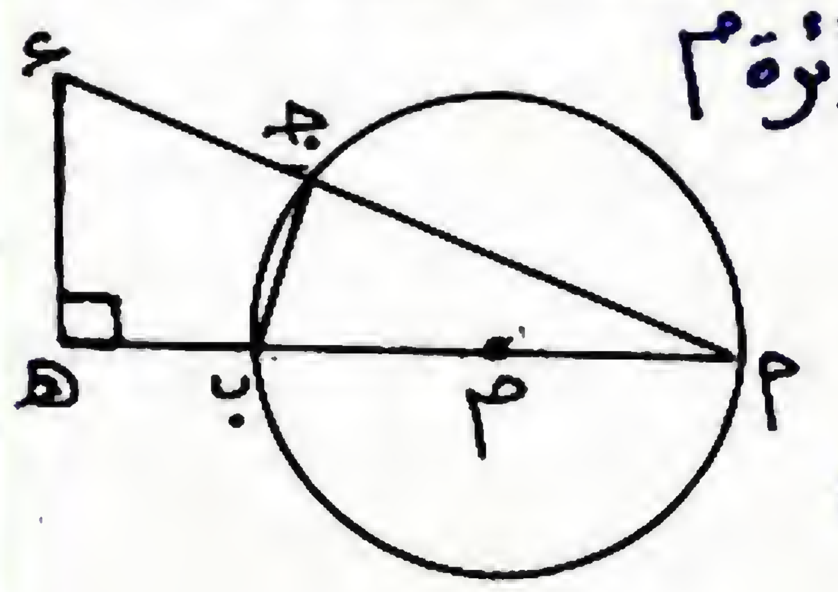
∴ △ م جـ د متساوي الساقين

مثال ③ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م

$\overleftrightarrow{دهـ} \perp \overleftrightarrow{أب}$

إثبت أن:

الشكل ب هـ د جـ رباعي دائري



البرهان ∵ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م

∴ ق(أ جـ̂ ب) = ٩٠° محيطية في نصف دائرة

∵ $\overline{بجـ} \perp \overline{أد}$

∴ ق(أ جـ̂ ب) = ق(هـ̂) وهي خارجة عن الشكل جـ ب هـ د ، د هـ مقابلة للمجاورة لها

∴ جـ ب هـ د رباعي دائري

مثال ④ أ ب جـ د شكل رباعي مرسوم داخل دائرة م

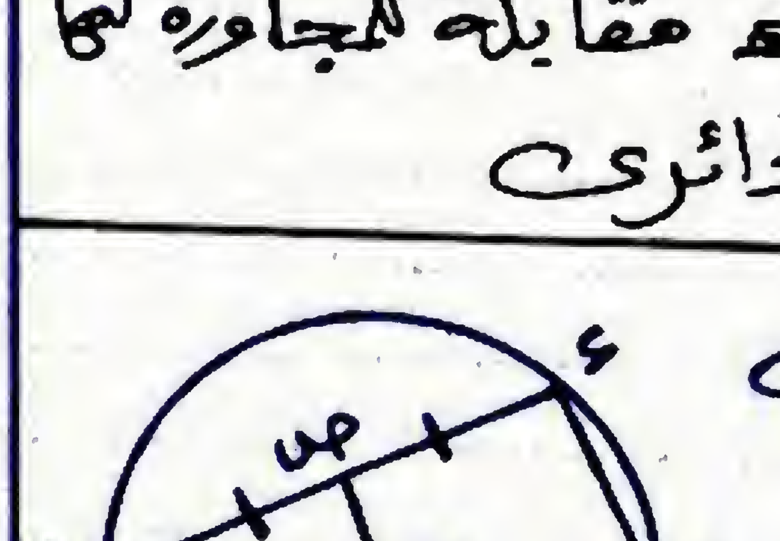
، س منتصف $\overline{بجـ}$

، ص منتصف $\overline{جـد}$

إثبت أن

① الشكل م س جـ ص رباعي دائري.

② ق(س م̂ ص) = ق(ب أ̂ د)



البرهان ∵ س منتصف $\overline{بجـ}$ ∴ ق(س̂) = ٩٠°

∵ ص منتصف $\overline{دجـ}$ ∴ ق(ص̂) = ٩٠°

∴ ق(ص̂) + ق(س̂) = ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠°

متقابلتان متكاملتان

∴ م س جـ ص رباعي دائري # ①

∴ ق(ص م̂ س) + ق(جـ̂) = ١٨٠° ← ①

∵ د أ ب جـ رباعي دائري

∴ ق(ب أ̂ د) + ق(جـ̂) = ١٨٠° ← ②

من ① ، ② ينتج أن

ق(ص م̂ س) = ق(ب أ̂ د) # ②

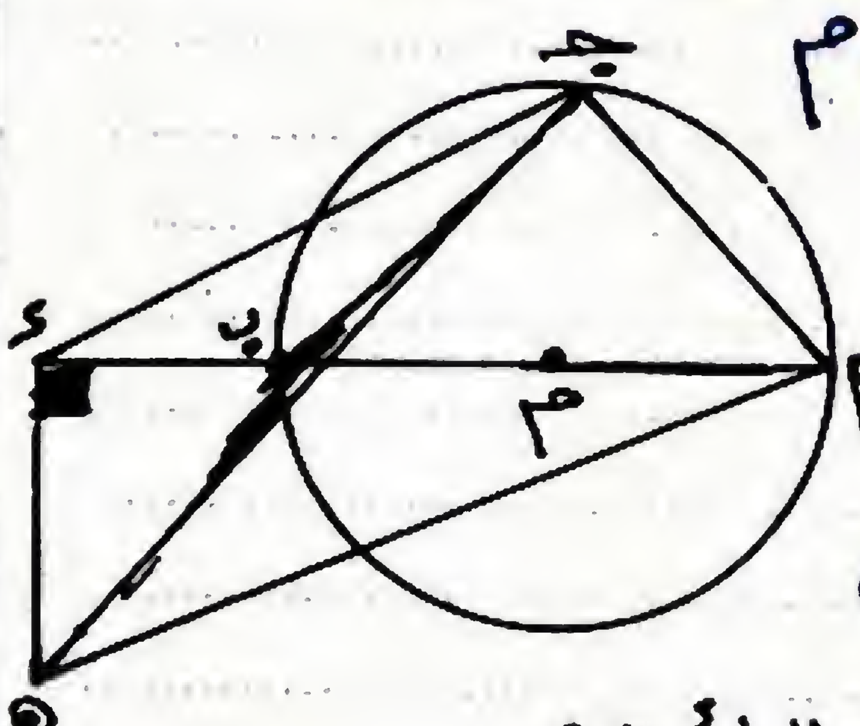
مثال ⑤ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م

، رسم $\overleftrightarrow{دهـ} \perp \overleftrightarrow{أب}$ ،

$\overrightarrow{جـب} \cap \overleftrightarrow{دهـ} = \{هـ\}$

إثبت أن

أ جـ د هـ شكل رباعي دائري



البرهان ∵ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م

∴ ∠ أ جـ ب محيطية مرسومة في نصف دائرة

∴ ق(أ جـ̂ ب) = ٩٠°

∴ ق(أ جـ̂ هـ) = ق(أ د̂ هـ) = ٩٠°

وهما مرسومتان على القاعدة $\overline{أهـ}$

∴ أ جـ د هـ رباعي دائري #

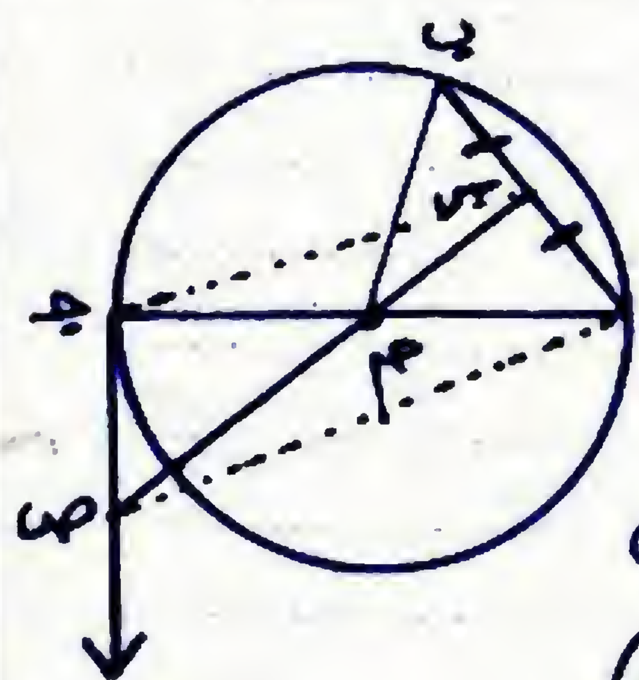
مثال ⑥ $\overline{أجـ}$ في الدائرة م ،

س منتصف $\overline{أب}$ ، $\overleftrightarrow{جـص}$ مماس للدائرة قطع $\overrightarrow{سم}$ في ص

إثبت أنه

① الشكل أ س جـ ص رباعي دائري

② ق(ب م̂ جـ) = ٢ ق(م ص̂ جـ)



البرهان ∵ س منتصف $\overline{أب}$ ∴ ق(س̂) = ٩٠°

∵ $\overline{أجـ}$ قطر ، ∵ $\overleftrightarrow{جـص}$ مماس عند جـ

∴ ق(جـ̂) = ٩٠°

∴ ق(أ س̂ ص) = ق(أ جـ̂ ص) = ٩٠°

وهما مرسومتان على القاعدة $\overline{أص}$

∴ أ س جـ ص رباعي دائري # ①

∴ ق(ب م̂ جـ) = ٢ ق(ب أ̂ جـ) ← ②

مركزية ومحيطية مرسومتان على $\overset{\frown}{بجـ}$

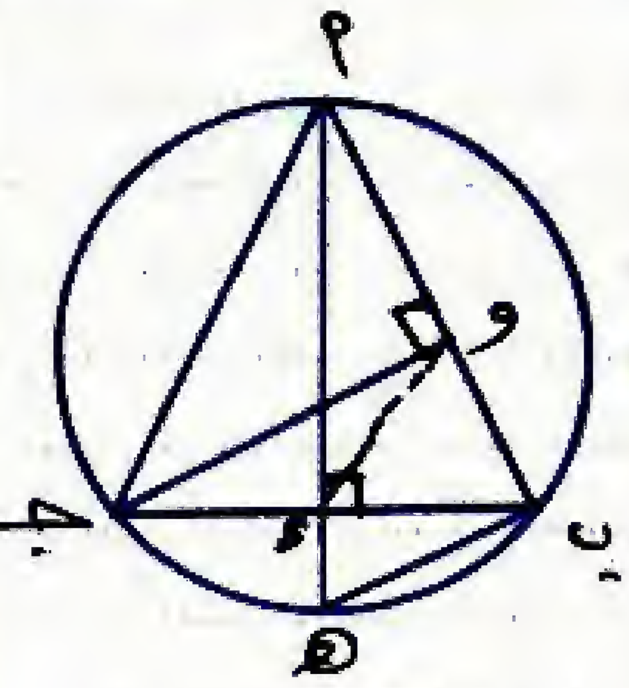
∵ ق(ب أ̂ جـ) = ق(م ص̂ جـ) ← ③ مرسومتان على قاعدة واحدة

من ②، ③ ∴ ق(ب م̂ جـ) = ٢ ق(م ص̂ جـ) # ②

01002097866

أ/ وليد محمد عكاشة

مثال ٧ $\overline{أد} \perp \overline{ب ج}$ ، $\overleftrightarrow{ج و} \perp \overline{أ ب}$ أثبت أن



① الشكل أ و د ج رباعي دائري
② $ق(\hat{هـ ب ج}) = ق(\hat{د و ج})$

البرهان

∵ $\overleftrightarrow{ج و} \perp \overline{أ ب}$ ، ∵ $\overline{أد} \perp \overline{ب ج}$

∴ $ق(\hat{أ و ج}) = ق(\hat{أ د ج}) = 90°$

وهما مرسومتان على القاعدة $\overline{أ ج}$

∴ الشكل أ و د ج رباعي دائري # ①

ينتج من الرباعي الدائري أن

~~ق(هـ ب ج) = ق(د و ج) ← ①~~

∵ $ق(\hat{د و ج}) = ق(\hat{د أ ج})$ مرسومة باندي قاعدة واحدة د ج ← ①

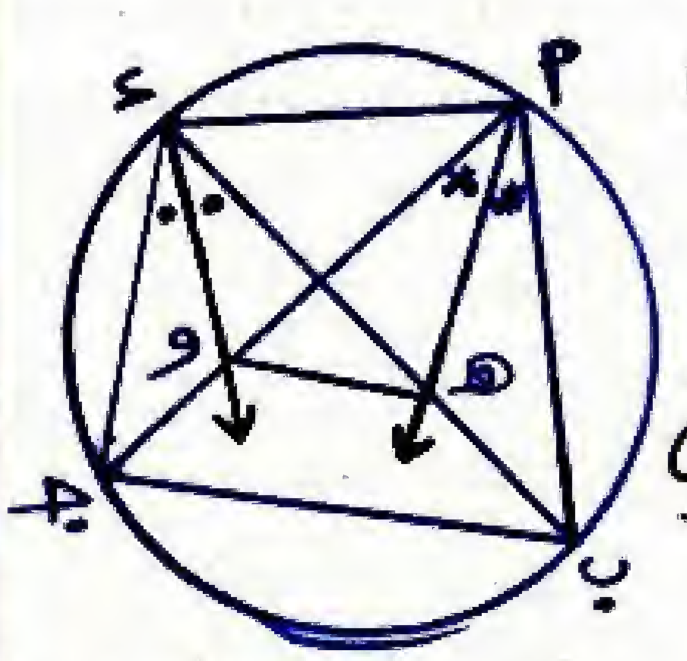
∵ $ق(\hat{هـ ب ج}) = ق(\hat{هـ أ ج})$ ← ②

محيطيتان مرسومتان على نفس القوس هـ ج

من ①، ② ينتج أن

$ق(\hat{هـ ب ج}) = ق(\hat{د و ج})$ # ②

مثال ٨ أ ب ج د رباعي دائري



$\overrightarrow{أ هـ}$ ينصف ∠ ب أ ج ،

$\overrightarrow{د و}$ ينصف ∠ ب د ج

أثبت أن ① أ هـ و د رباعي دائري

② $\overline{هـ و} // \overline{ب ج}$

البرهان ∵ $ق(\hat{ب أ ج}) = ق(\hat{ب د ج})$ محيطيتان مرسومتان على قاعدة واحدة

∴ $\frac{1}{2} ق(\hat{ب أ ج}) = \frac{1}{2} ق(\hat{ب د ج})$

∴ $ق(\hat{هـ أ و}) = ق(\hat{هـ د و})$ وهما مرسومتان على القاعدة $\overline{هـ و}$

∴ أ هـ و د شكل رباعي دائري # ①

من الشكل الرباعي الدائري أ هـ و د نستنتج أن

$ق(\hat{د هـ و}) = ق(\hat{و أ د})$ مرسومتان مع القاعدة $\overline{و د}$ ← ①

∵ $ق(\hat{ج ب د}) = ق(\hat{ج أ د})$ ← ②

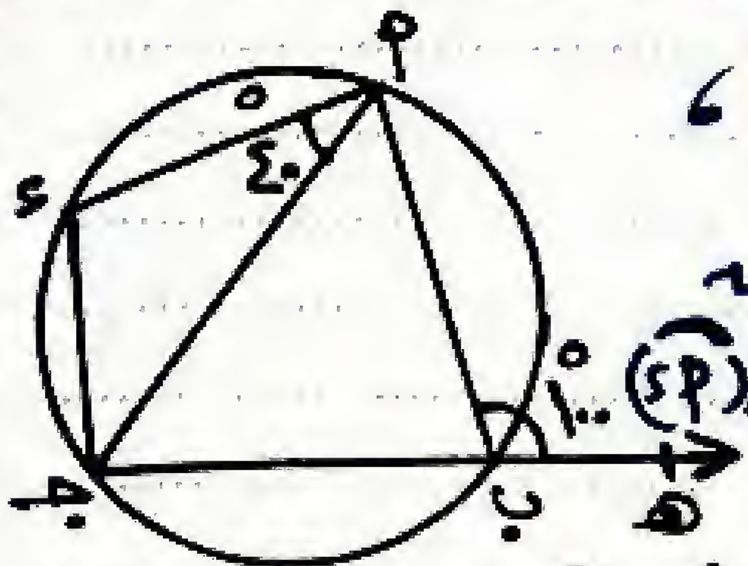
محيطيتان مرسومتان على نفس القوس ج د

من ①، ② ينتج أن

$ق(\hat{ج ب د}) = ق(\hat{د هـ و})$ وهما في وضع تناظر

∴ $\overline{هـ و} // \overline{ب ج}$ # ②

مثال ٩ $ق(\hat{أ ب ج}) = 100°$ ، $ق(\hat{ج أ د}) = 40°$ أوجد ~~ق(...)~~ $ق(\overset{\frown}{أ د}) = ق(\overset{\frown}{د ج})$



البرهان ∵ أ ب ج د رباعي دائري

∵ ∠ أ ب هـ خارجة عن الشكل الرباعي الدائري أ ب ج د

∴ $ق(\hat{أ ب هـ}) = ق(\hat{د}) = 100°$

في Δ أ د ج $ق(\hat{أ ج د}) = 180° - (100° + 40°)$

∴ $ق(\hat{أ ج د}) = 40°$

∴ $ق(\hat{د أ ج}) = ق(\hat{أ ج د}) = 40°$

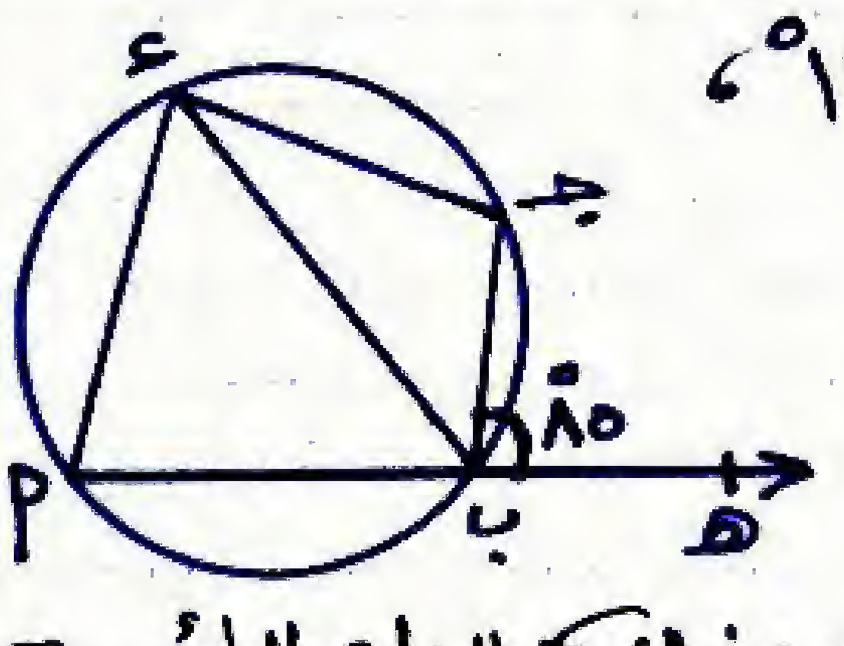
∴ Δ أ د ج متساوي الساقين

∴ أ د = د ج وتر = وتر

∴ $ق(\overset{\frown}{أ د}) = ق(\overset{\frown}{د ج})$ قوس = قوس

#

مثال ١٠ $ق(\overset{\frown}{أ ب}) = 110°$ ، $ق(\hat{ج ب هـ}) = 85°$



أوجد : $ق(\hat{ب د ج})$

البرهان

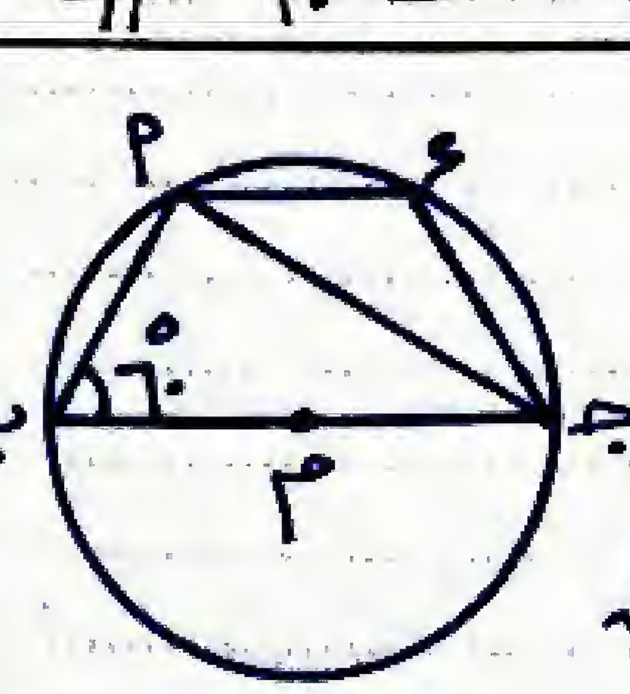
∵ ∠ ج ب هـ خارجة عن الشكل الرباعي الدائري ج ب أ د ∴ $ق(\hat{ج ب هـ}) = ق(\hat{ج د أ}) = 85°$

∵ $ق(\overset{\frown}{أ ب}) = 110°$ ∴ $ق(\hat{ب د أ})$ المحيطية $= \frac{1}{2} ق(\overset{\frown}{أ ب})$

∴ $ق(\hat{ب د أ}) = 55°$

∴ $ق(\hat{ب د ج}) = 85° - 55° = 30°$ #

مثال ١١ أ ب ج د رباعي دائري



$\overline{ج ب}$ قطر في الدائرة م ، $ق(\hat{أ ب ج}) = 60°$ ،

طول $\overset{\frown}{أ د}$ = طول $\overset{\frown}{ج د}$ أثبت أن

$\overrightarrow{ج أ}$ ينصف ∠ د ج ب

البرهان ∵ $\overline{ج ب}$ قطر في الدائرة م

∴ $ق(\hat{ج أ ب}) = 90°$ قائمة محيطية مرسومة في نصف دائرة

∵ ق(أ د) = ق(جـ د)

∴ أ د = جـ د ∴ Δ د جـ أ متساوي الساقين

∵ أ د جـ ب رباعي دائري

∴ ق(∠د) = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠° (متقابلتان متكاملتان)

في Δ د جـ أ ق(∠د جـ أ) = $\frac{١٨٠ - ١٢٠}{٢}$ = ٣٠°

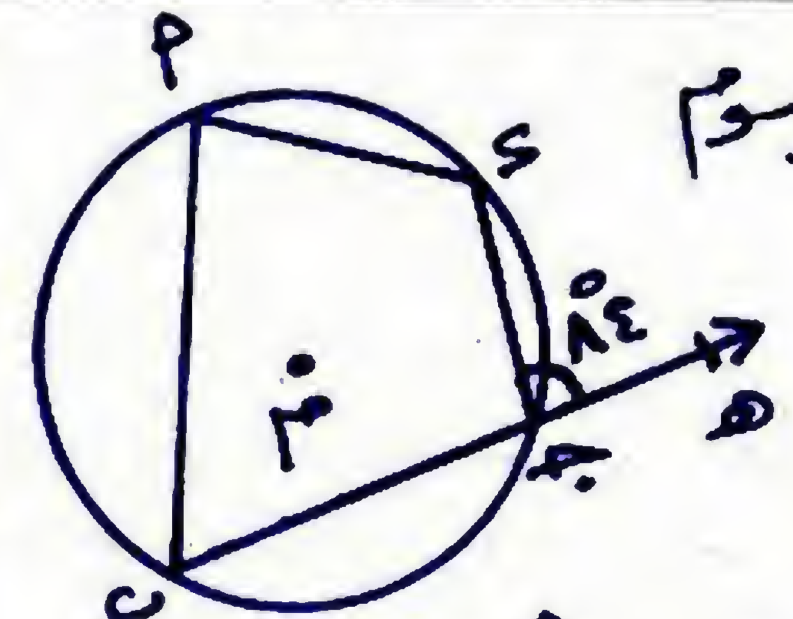
في Δ أ جـ ب ∴ ق(∠أ جـ ب) = ١٨٠° − (٦٠° + ٩٠°)

∴ ق(∠أ جـ ب) = ٣٠°

∴ ق(∠د جـ أ) = ق(∠أ جـ ب) = ٣٠°

∴ جـ أ ينصف ∠ د جـ ب #

مثال ١٢ أ ب جـ د رباعي مرسوم داخل دائرة م



ق(∠د جـ هـ) = ٨٤°

ق(∠ب) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠د)

أوجد ① ق(∠أ) ② ق(∠ب)

البرهان ∵ ∠ د جـ هـ خارجة عن الشكل الرباعي أ ب جـ د

∴ ق(∠د جـ هـ) = ق(∠أ) = ٨٤° # ①

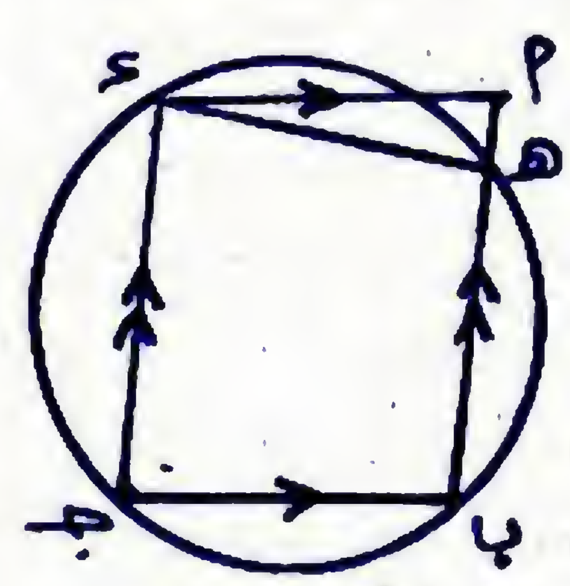
∵ أ ب جـ د ∴ ق(∠ب) + ق(∠د) = ١٨٠°

∵ ق(∠ب) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠د)

∴ ق(∠ب) = $\frac{١٨٠}{٣}$ = ٦٠°

∴ ق(∠ب) = ٦٠° # ②

مثال ١٣ أ ب جـ د متوازي أضلاع



إثبت أن

أ د = هـ د

البرهان ∵ د هـ ب جـ رباعي دائري

∴ ق(∠أ هـ د) = ق(∠جـ) ← ①

خارجة عن الرباعي الدائري هـ ب جـ د

∵ أ ب جـ د متوازي أضلاع

∴ ق(∠أ) = ق(∠جـ) ← ②

من ① ، ② ينتج أنه

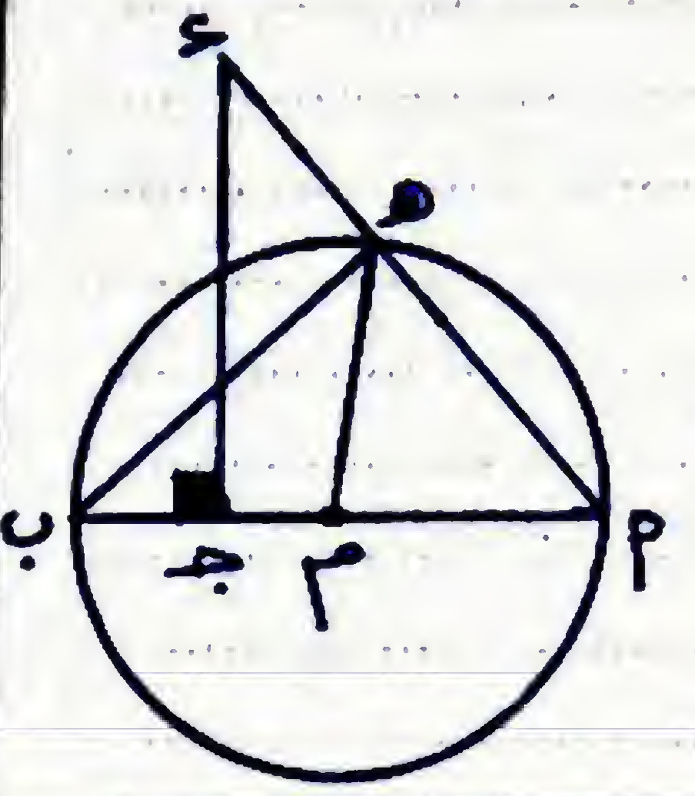
ق(∠أ هـ د) = ق(∠أ)

∴ Δ د أ هـ متساوي الساقين ∴ أ د = هـ د

#

تمارين على الشكل الرباعي الدائري

١ أ ب قطر في الدائرة م ،

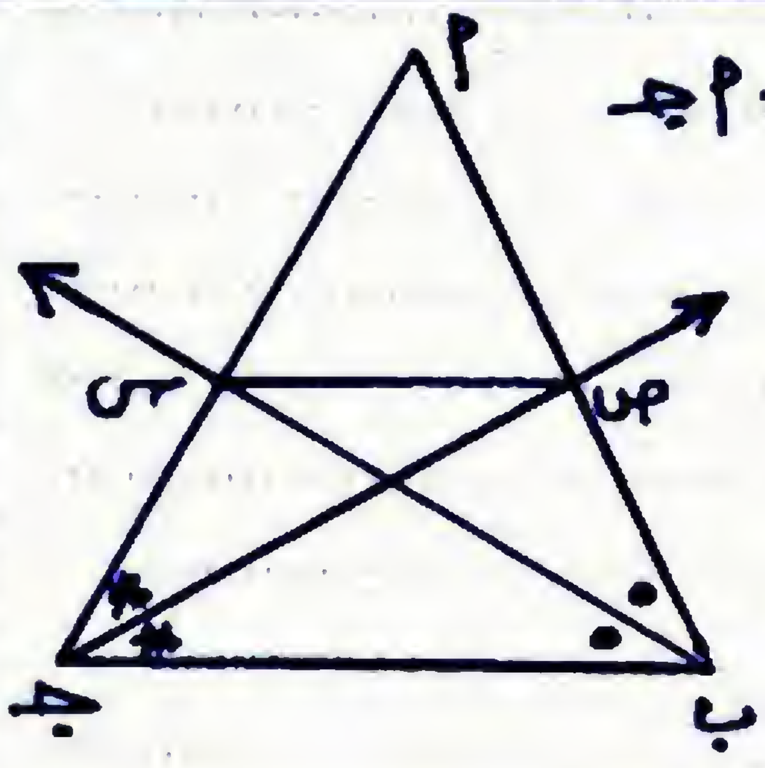


هـ د ⊥ أ ب إثبت أن

① النقط د ، هـ ، جـ ، ب يمر بها دائرة واحدة

② ق(∠أ م هـ) = ٢ق(∠د)

٢ أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ



ب س ينصف ∠ ب ،

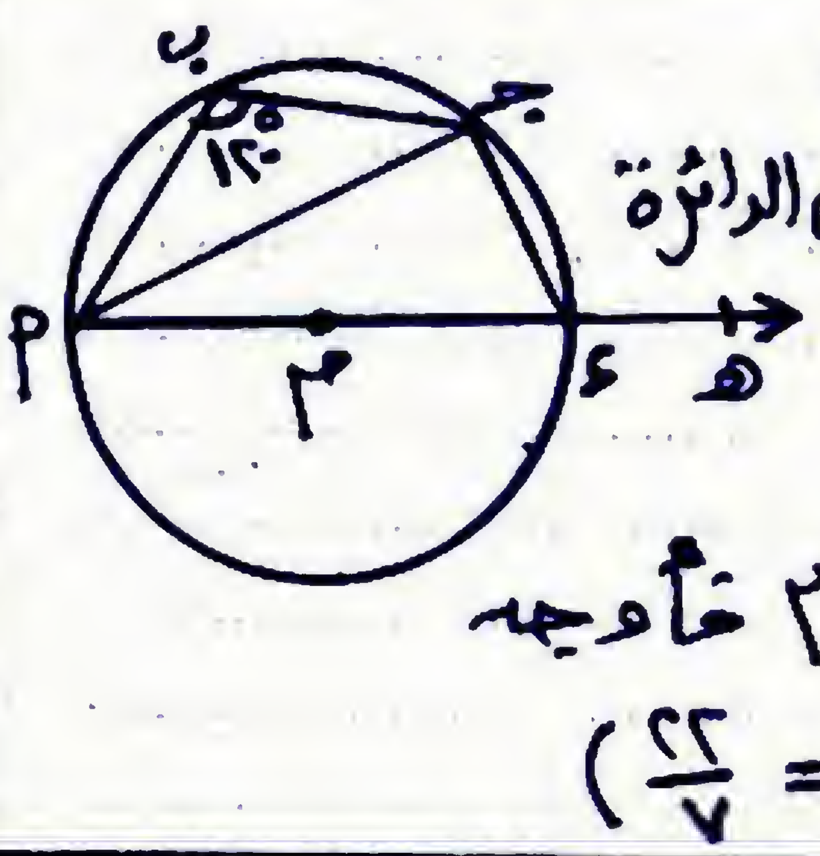
جـ ص ينصف ∠ جـ ،

إثبت أن

① ب جـ س ص رباعي دائري

② س ص // ب جـ

٣ أ ب جـ د رباعي دائري



ق(∠ب) = ١٢٠° ، أ د قطر في الدائرة

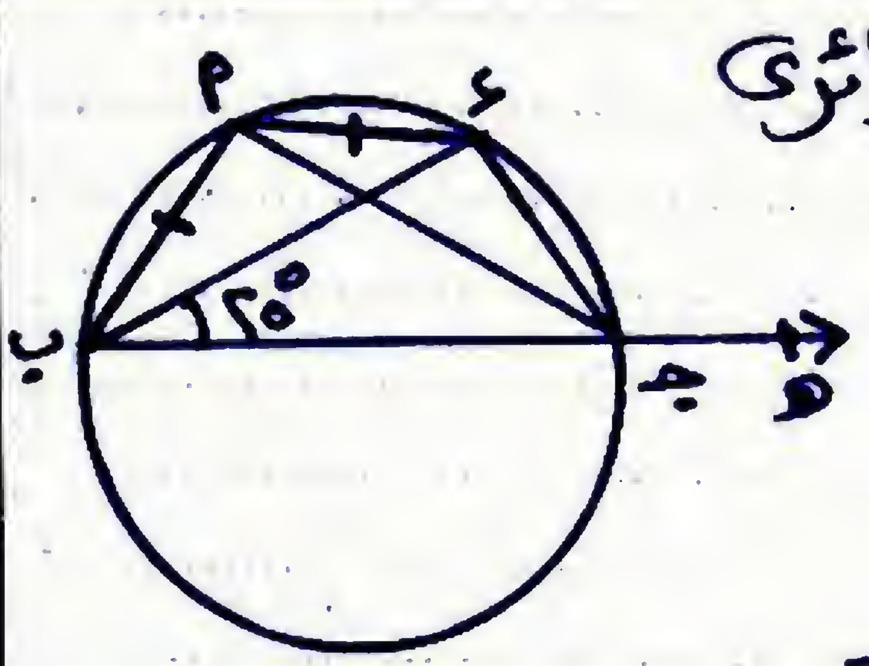
① أوجد ق(∠جـ د هـ) ،

ق(∠جـ أ د)

② إذا كان: د جـ = $\sqrt{٧}$ فأوجد

طول $\overset{\frown}{أ د}$ حيث ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

٤ أ ب جـ د شكل رباعي دائري



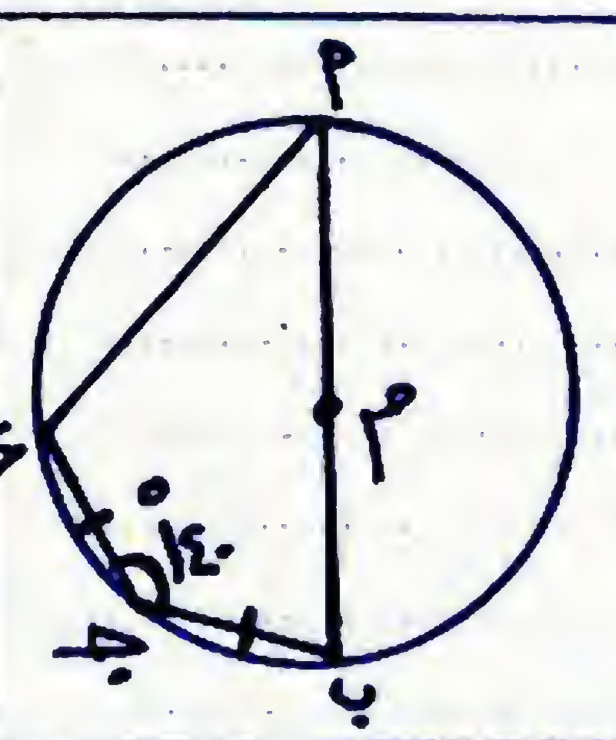
فيه أ ب = أ د

ق(∠هـ ب د) = ٢٥°

ق(∠هـ جـ د) = ١٣٠°

إثبت أن أ د = د جـ

٥ أ ب جـ د رباعي دائري ،

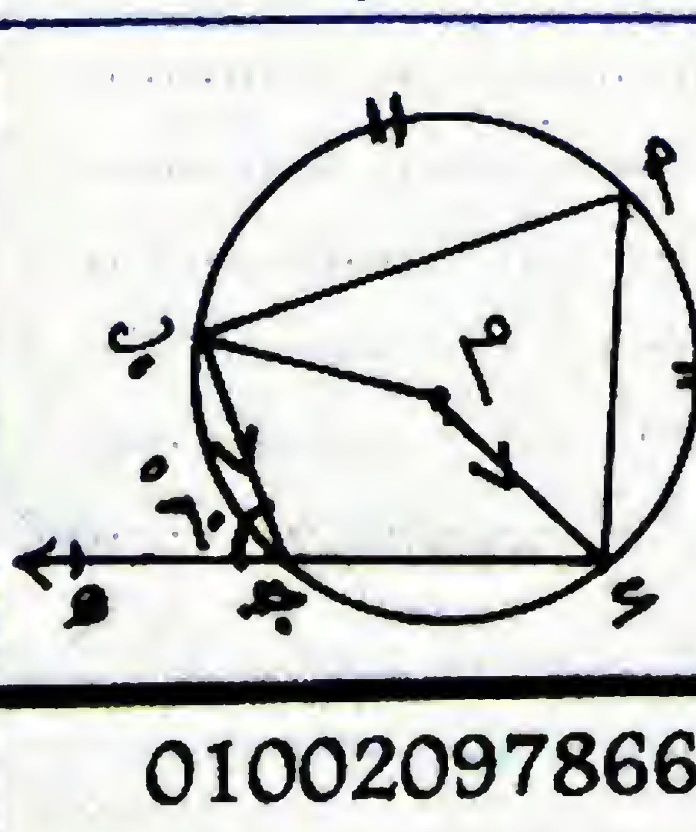


جـ ب = جـ د ،

ق(∠ب جـ د) = ١٤٠°

أوجد ① ق(∠أ) ② ق(∠د)

٦ ق(∠ب جـ هـ) = ٦٠° ،



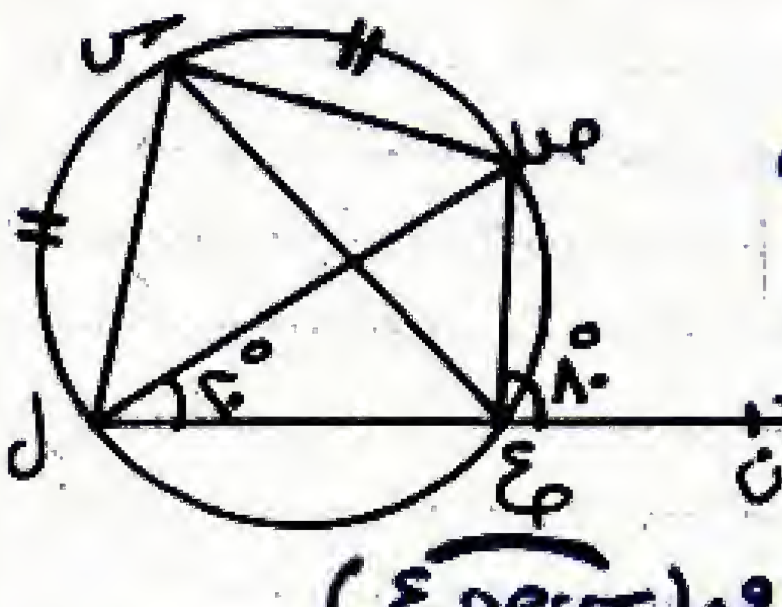
ب جـ // م د ،

أ منتصف $\overset{\frown}{ب د}$ الأكبر

إثبت أن ① ب م د جـ معين

② أ جـ قطر في الدائرة .

مثال ١٢



س منتصف $\overset{\frown}{ص ل}$ ، ق($ص \hat{ع} ن$) = ٨٠° ، ق($ص \hat{ل} ع$) = ٢٠°

أوجد ق($ع \hat{س} ل$) ، ق($\overset{\frown}{س ص ع}$)

مثال ١٣

ب جـ قطر في الدائرة م ، ب أ وتر فيها ، ء ∈ أ جـ بحيث ق($أ \hat{ء} جـ$) = ١١٨° ، رسم أ هـ // ء جـ ويقطع الدائرة في هـ

① أوجد ق($أ \hat{ب} جـ$)

② إثبت أن ق($أ \hat{جـ} ء$) = ق($جـ \hat{ب} هـ$)

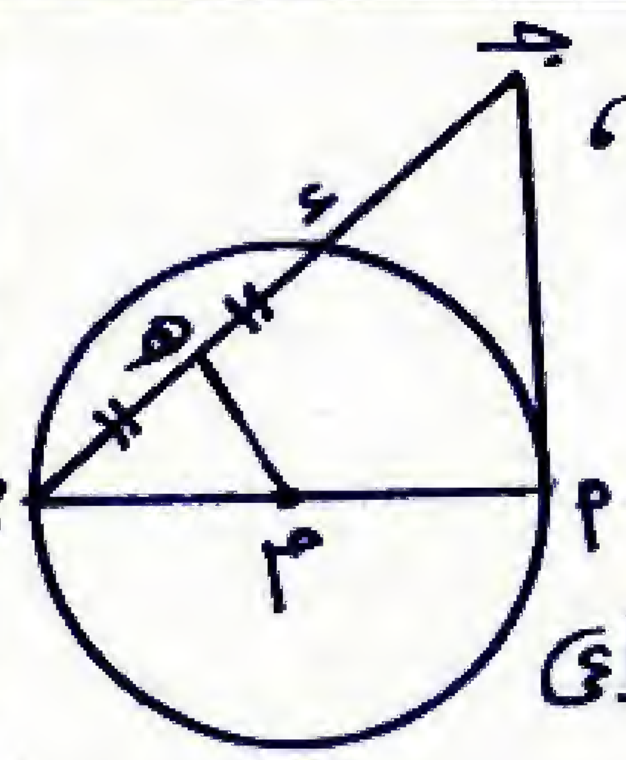
مثال ١٤

أ ب جـ مثلث حاد الزوايا مرسوم داخل دائرة ، رسم $\overleftrightarrow{أ ء}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ليقطع $\overline{ب جـ}$ عند ء ويقطع الدائرة عند هـ ، رسم $\overline{جـ و}$ ⊥ $\overline{أ ب}$ ليقطع $\overline{أ ب}$ عند و

اثبت أن ① الشكل أ و ء جـ رباعي دائري

② ق($ب \hat{و} ء$) = ق($ب \hat{هـ} ء$)

مثال ١٥

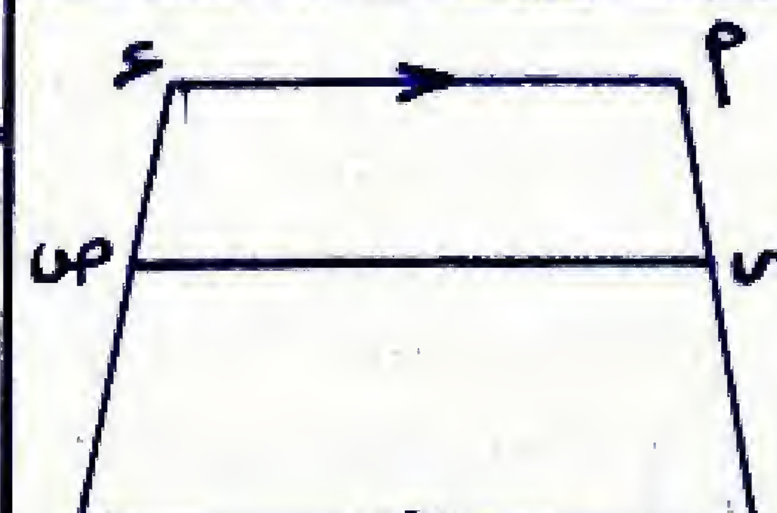


$\overline{أ ب}$ قطر في الدائرة م ، $\overleftrightarrow{أ جـ}$ مماس لها عند أ ، هـ منتصف $\overline{ء ب}$ ، ق($\hat{ب}$) = ٤٠°

① إثبت أن: الشكل أ م هـ جـ رباعي دائري

② أوجد ق($\hat{جـ}$)

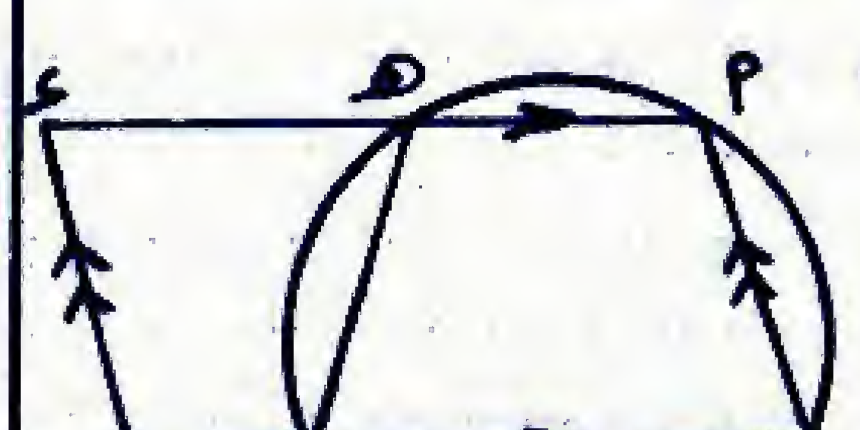
مثال ١٦



أ ب جـ ء شكل رباعي فيه $\overline{أ ء}$ // $\overline{ب جـ}$ ، فإذا كان الشكل أ س ص ء رباعي دائري

إثبت أن الشكل س ب جـ ص رباعي دائري.

مثال ١٧



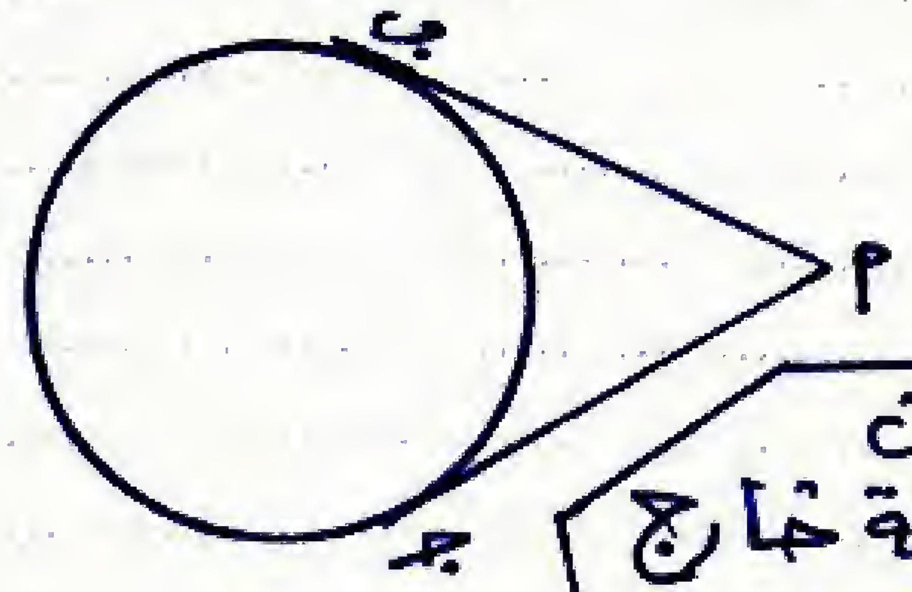
أ ب جـ ء متوازي أضلاع

إثبت أن الشكل جـ ء هـ و رباعي دائري.

الدرس الخامس :-

[العلاقة بين مماسات الدائرة]

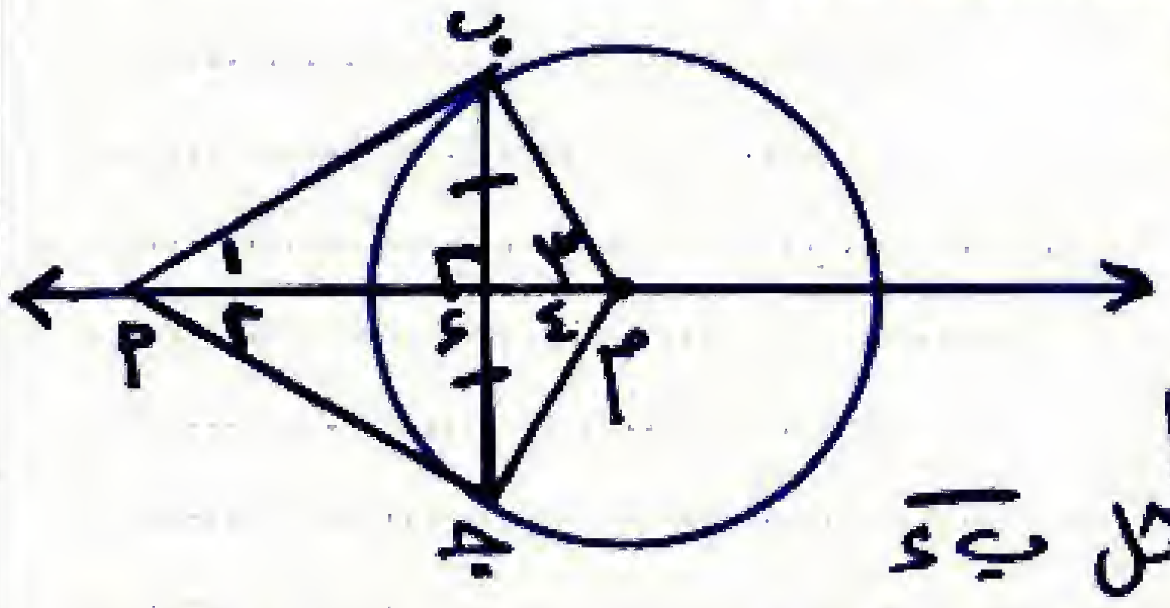
نظرية (٤)



القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة متساويتان في الطول.

∵ $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$ قطعتان مماستان مرسومتان من أ ∴ $\boxed{أ ب = أ جـ}$

نتائج هامة



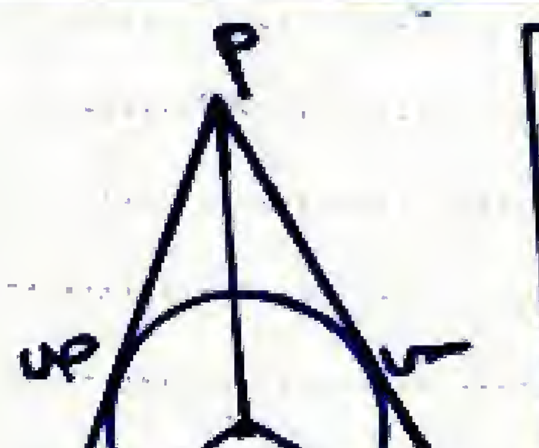
$\overleftrightarrow{أ م}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ، $\boxed{ب ء = ء جـ}$

∴ $\overleftrightarrow{أ م}$ محور تماثل $\overline{ب جـ}$

① المستقيم المار بمركز الدائرة ونقطة تقاطع مماسين لها يكون محوراً لوتر التماس لهذين المماسين

② المستقيم المار بمركز الدائرة ونقطة تقاطع مماسين لها ينصف الزاوية بين هذين المماسين كما ينصف الزاوية بين نصفي القطرين المارين بنقطتي التماس.

ق($\hat{١}$) = ق($\hat{٢}$) ، ق($\hat{٣}$) = ق($\hat{٤}$)



مركز الدائرة الداخلة لأي مثلث هو نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية.

لاحظ أن

$\boxed{أ س = أ ص}$ قطعتان مماستان مرسومتان من أ

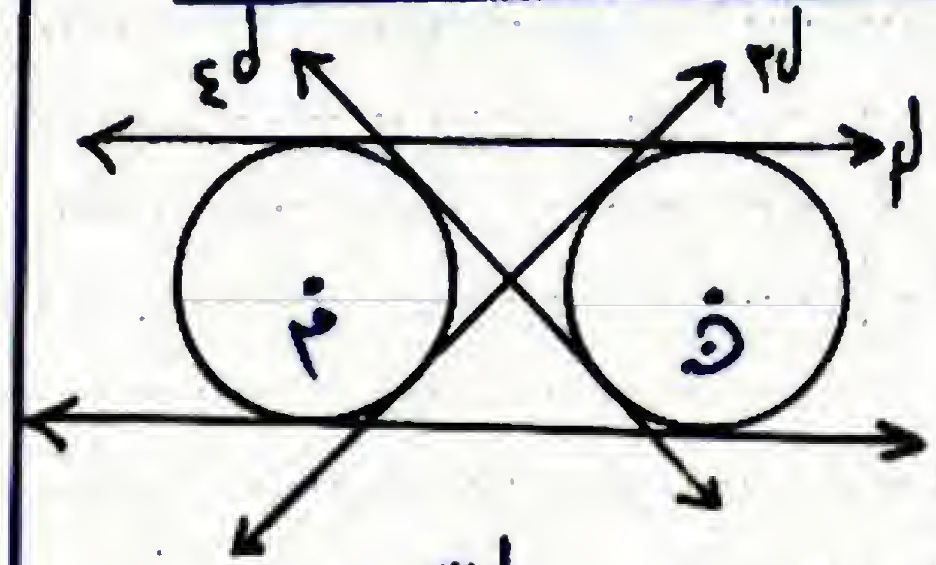
$\boxed{ب س = ب ع}$ قطعتان مماستان مرسومتان من ب

$\boxed{جـ ع = جـ ص}$ قطعتان مماستان مرسومتان من جـ

[الرياضيات غذاء العقل]

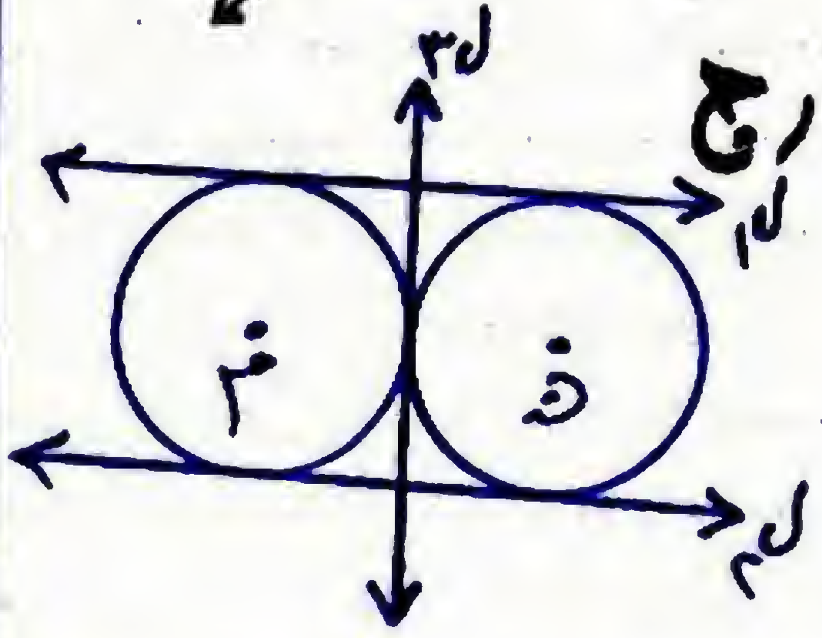
* عدد المماسات المشتركة لدائرتين :-

1 متباعدتان



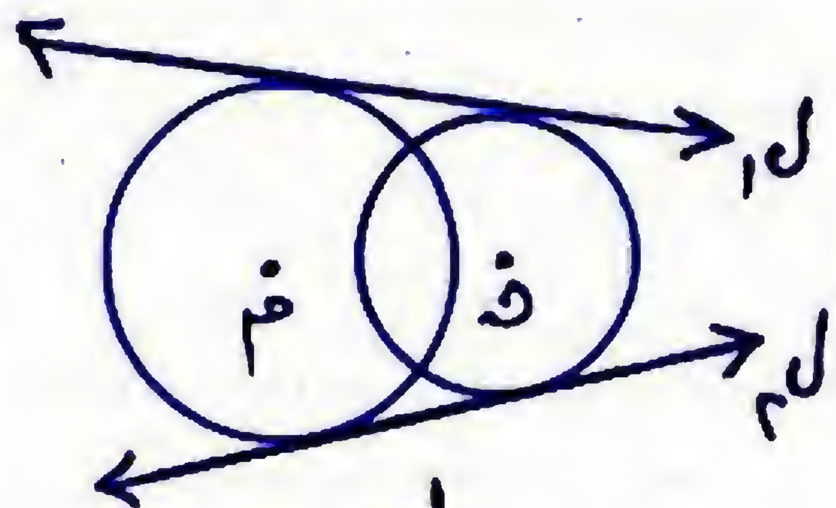
٤ مماسات مشتركة

2 متماستان من الخارج



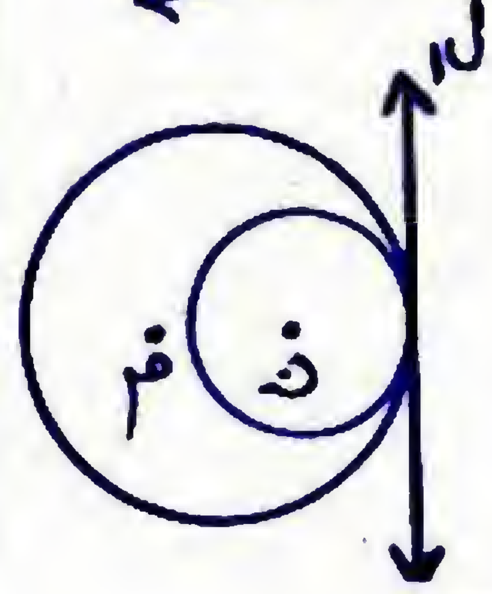
٣ مماسات مشتركة

3 متقاطعتان



2 مماسان مشتركان

4 متماستان من الداخل



1 مماس واحد

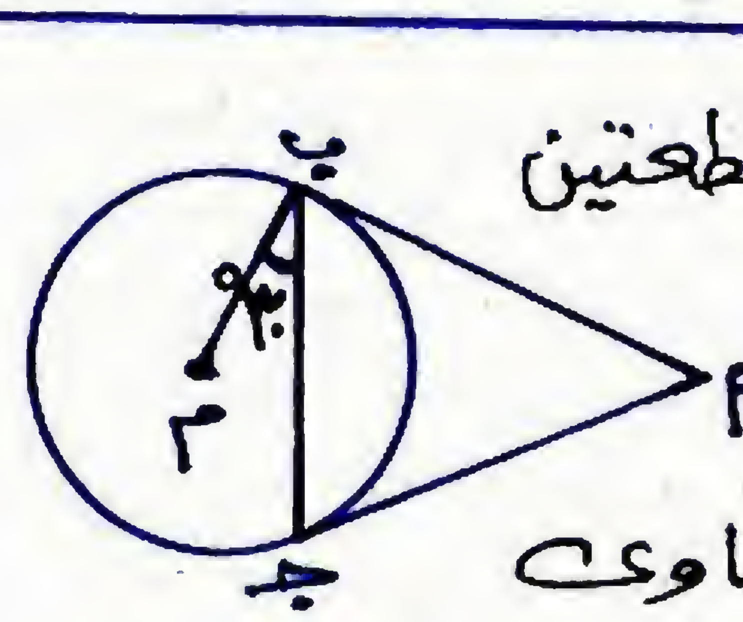
5 متداخلتان ، متحدتي المركز

عدد المماسات المشتركة = صفر

مثال 1 $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ قطعتين مماستين للدائرة م

، ق ($\hat{م ب جـ}$) = ٣٠°

إثبت أن △ أ ب جـ متساوي الأضلاع



البرهان ∵ $\overline{أب}$ مماس ، $\overline{مب}$ نصف قطر

∴ ق ($\hat{أ ب م}$) = ٩٠°

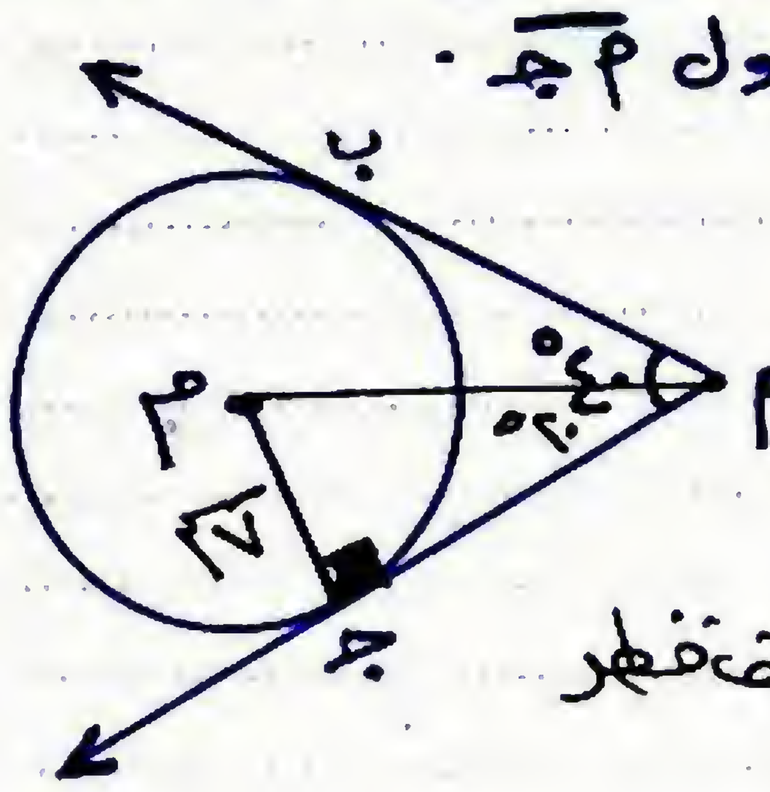
∴ ق ($\hat{أ ب جـ}$) = ٩٠° − ٣٠° = ٦٠°

∵ أ ب = أ جـ قطعتان مماستان مرسومتان من أ ∴ △ أ ب جـ متساوي الأضلاع #

أي مثلث متساوي الساقين فيه زاوية قياسها ٦٠° يكون مثلث متساوي الأضلاع

مثال 2 $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب ، جـ على الترتيب ، ق ($\hat{أ}$) = ٤٠°

، إذا كان طول نصف قطر الدائرة $\sqrt{7}$ ٣ أوجد لأقرب سنتيمتر: طول $\overline{أجـ}$.



البرهان نرسم $\overline{أم}$

ينصف ∠ أ

∴ ق ($\hat{م أ جـ}$) = ٢٠°

∵ $\overline{أجـ}$ مماس ، $\overline{مجـ}$ نصف قطر

∴ ق ($\hat{جـ}$) = ٩٠°

ظا ($\hat{جـ أ م}$) = $\frac{م جـ}{أ جـ}$

$\frac{ظا ٢٠}{١} = \frac{٧}{أ جـ}$ أ جـ = $\frac{٧ \times ١}{ظا ٢٠}$ ≃ ١٩

مثال 3 $\overleftrightarrow{س أ}$ ، $\overleftrightarrow{س ب}$ مماسان للدائرة عند أ ، ب

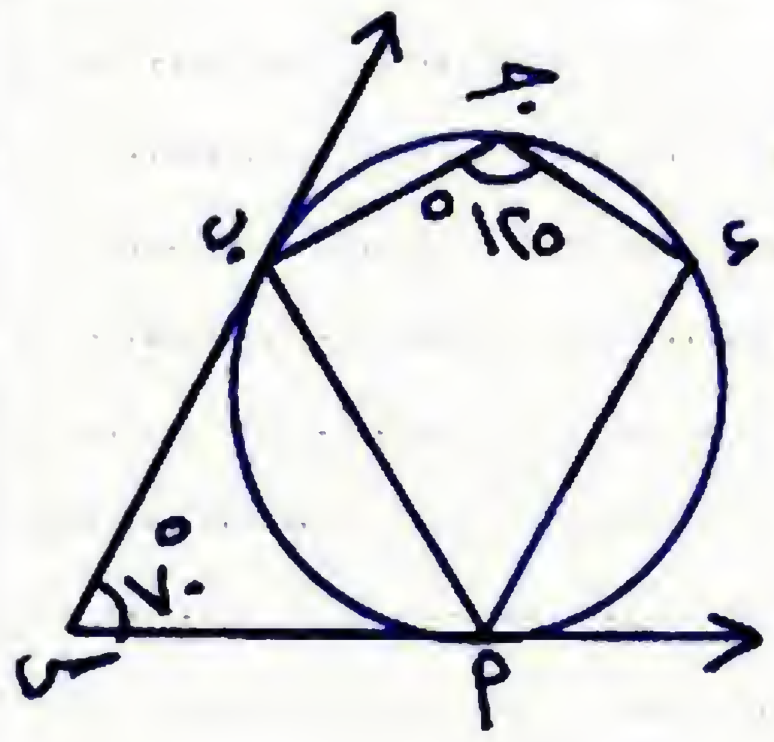
ق ($\hat{أ س ب}$) = ٧٠° ،

ق ($\hat{ء جـ ب}$) = ١٢٥° ،

إثبت أن

1 $\overleftrightarrow{أب}$ ينصف ∠ ء أ س

2 $\overleftrightarrow{أ ء}$ // $\overleftrightarrow{س ب}$



البرهان

∵ أ ء جـ ب رباعي دائري

∴ ق ($\hat{أ}$) = ١٨٠° − ١٢٥° = ٥٥° (متقابلتان متكاملتان)

∵ $\overline{س أ}$ ، $\overline{س ب}$ قطعتان مماستان مرسومتان من س

∴ س أ = س ب

∴ △ س أ ب متساوي الساقين

∴ ق ($\hat{س أ ب}$) = $\frac{١٨٠ - ٧٠}{٢}$ = ٥٥°

∴ ق ($\hat{س أ ب}$) = ق ($\hat{ء أ ب}$) = ٥٥°

∴ $\overleftrightarrow{أب}$ ينصف ∠ ء أ س # 1

∴ ق ($\hat{ء أ س}$) = ٥٥° + ٥٥° = ١١٠°

∴ ق ($\hat{ء أ س}$) + ق ($\hat{س}$) = ٧٠ + ١١٠ = ١٨٠°

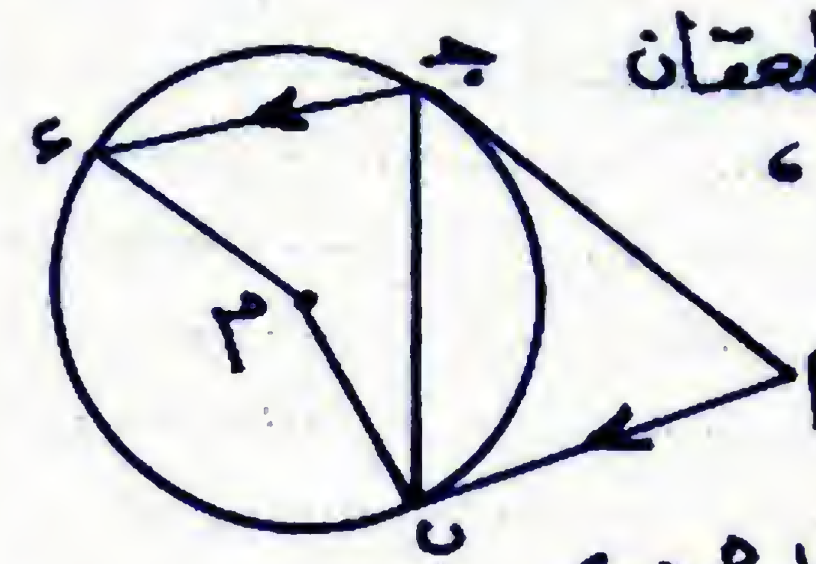
وهما في وضع تداخل

∴ $\overleftrightarrow{أ ء}$ // $\overleftrightarrow{س ب}$ # 2

الإعتذار عن الخطأ لا يجرح كرامتك بل يجعلك كبيراً بعين من أخطأت بحقه

أ/ وليد محمد عكاشة
01002097866

مثال ٤ أب ، أجـ قطعتان مماستان للدائرة م ، أب // جـ ء ، ق(∠ب م ء) = ١٣٠°



① إثبت أن: جـب ينصف ∠ أ جـ ء

② أوجد: ق(∠أ)

البرهان ق(∠ب جـ ء) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ب م ء) = ٦٥°

محيطية ومركزية مشتركتان في القوس ب ء

∵ جـ ء // أب

∴ ق(∠أ ب جـ) = ق(∠ب جـ ء) = ٦٥° بالتبادل

∵ أب = أجـ قطعتان مماستان

∴ △ أ ب جـ متساوي الساقين

∴ ق(∠أ جـ ب) = ق(∠أ ب جـ) = ٦٥°

∴ ق(∠أ جـ ب) = ق(∠ب جـ ء) = ٦٥°

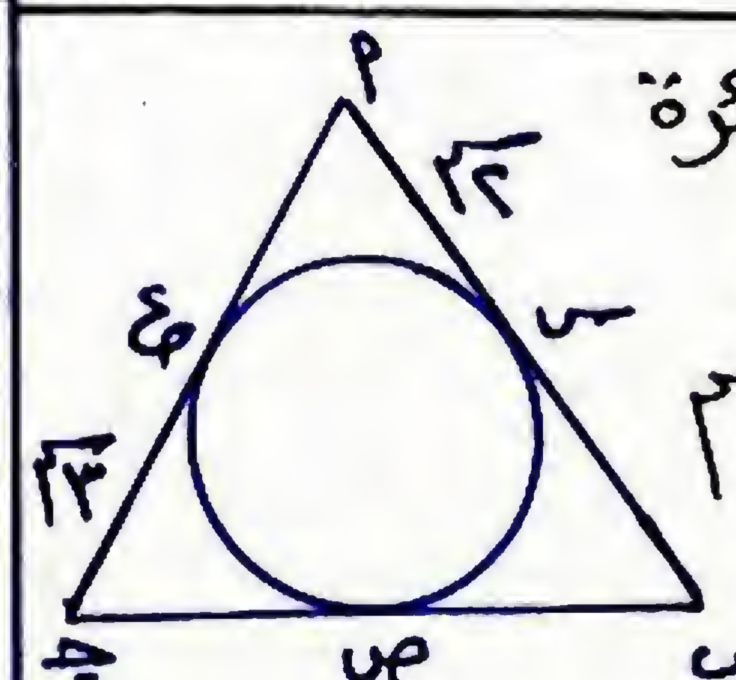
∴ جـب ينصف ∠ أ جـ ء # ①

في △ أ ب جـ

ق(∠أ) = ١٨٠° − (٦٥° + ٦٥°)

= ١٨٠° − ١٣٠° = ٥٠° # ②

مثال ٥ △ أ ب جـ يمس الدائرة من الخارج في س ، ص ، ع ، فإذا كان محيط △ أ ب جـ = ١٨ سم ، أ س = ٢ سم ، جـ ع = ٣ سم



احسب طول ب ص

البرهان ∵ أ س = أ ع قطعتان مماستان

∴ أ س = أ ع = ٢ سم

∵ جـ ص = جـ ع قطعتان مماستان مرسومتان من جـ

جـ ص = جـ ع = ٣ سم

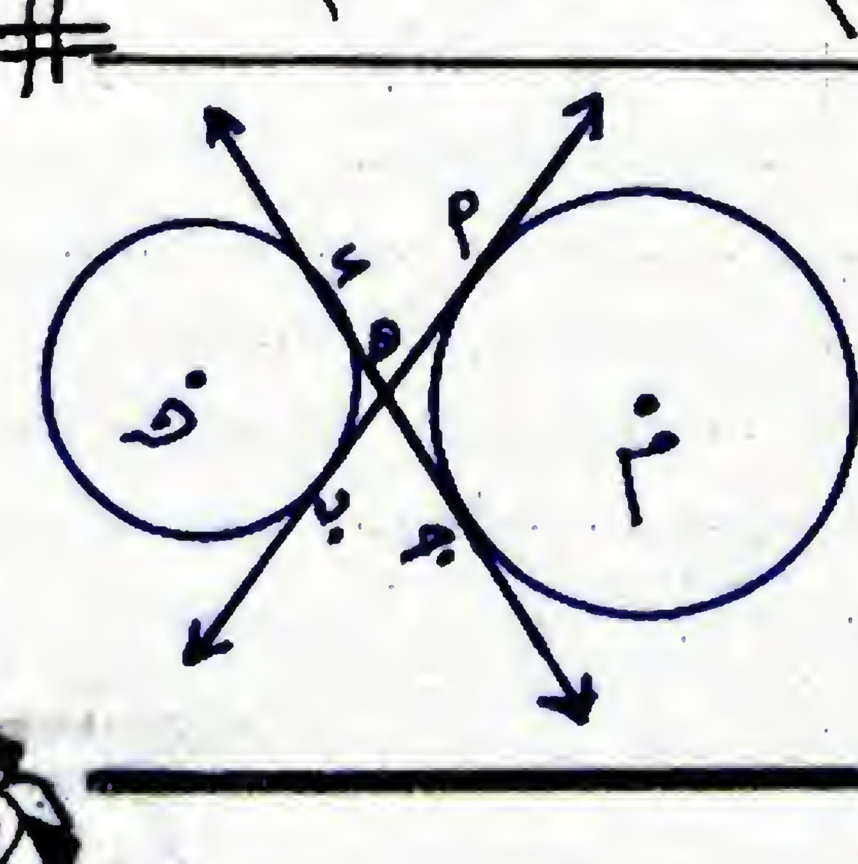
∵ محيط △ أ ب جـ = ١٨ سم

∴ ب ص = $\frac{١٨ - (٤ + ٦)}{٢} = \frac{١٨ - ١٠}{٢}$ = ٤ سم #

مثال ٦ أب ، جـ ء مماسان للدائرتين م ، ن

إثبت أن

$\boxed{\text{أب = جـ ء}}$



في الدائرة م هـأ ، هـجـ مماستان من عند هـ

∴ هـأ = هـجـ ①

في الدائرة ن هـء ، هـب مماستان من عند هـ

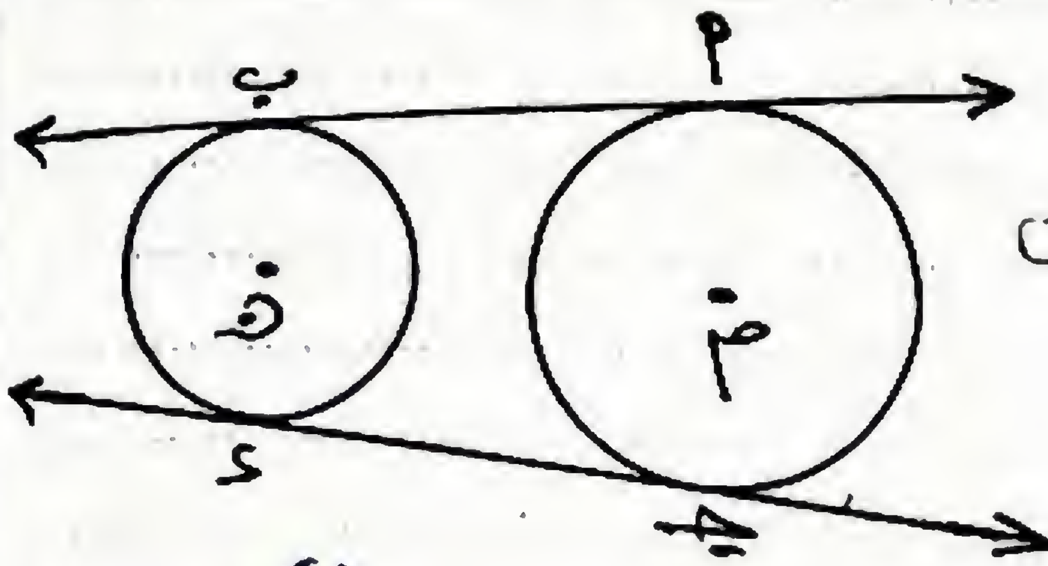
∴ هـء = هـب ②

بجمع ① ، ② ∴ أب = جـ ء #

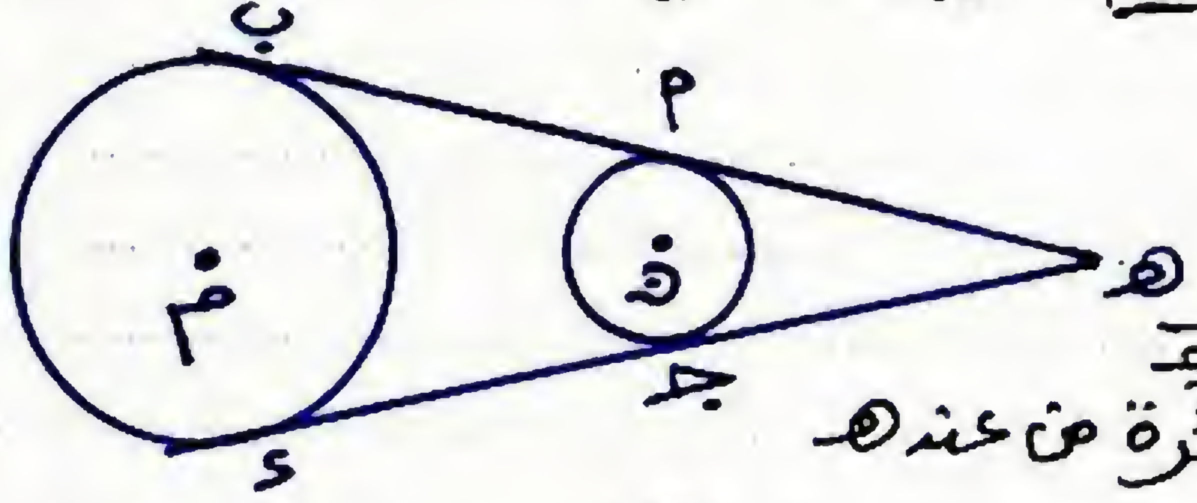
مثال ٧ أب ، جـ ء مماسان

إثبت أن

$\boxed{\text{أب = جـ ء}}$



البرهان



∵ هـأ ، هـجـ مماسان للدائرة من عند هـ

∴ هـأ = هـجـ ①

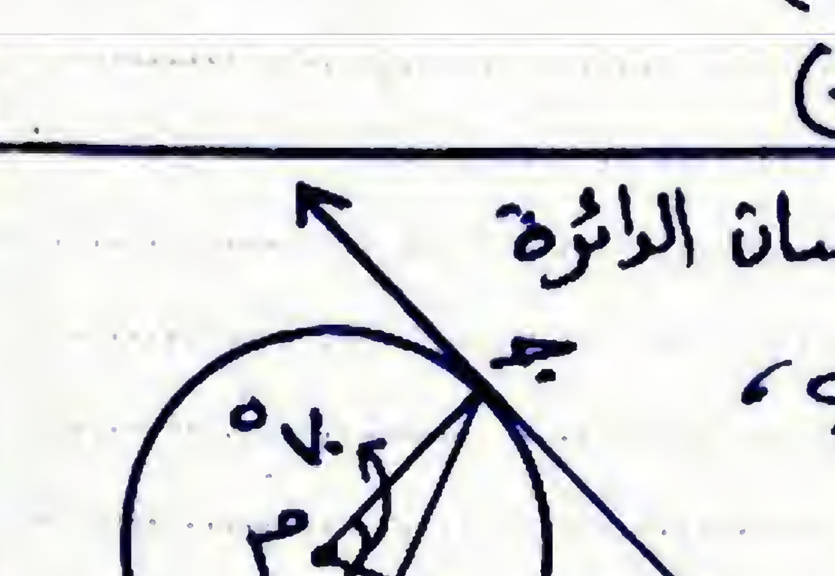
∵ هـب ، هـء مماسان للدائرة من عند هـ

∴ هـب = هـء ② بطرح ① من ②

∴ أب = جـ ء #

تمارين على المماسات في الدائرة

مثال ١ أب ، أجـ قطعتان مماستان للدائرة م ، ق(∠ب أ م) = ٢٥° ، هـ ∈ ب جـ الأكبر



أوجد ① ق(∠م جـ ب)

② ق(∠ب هـ جـ)

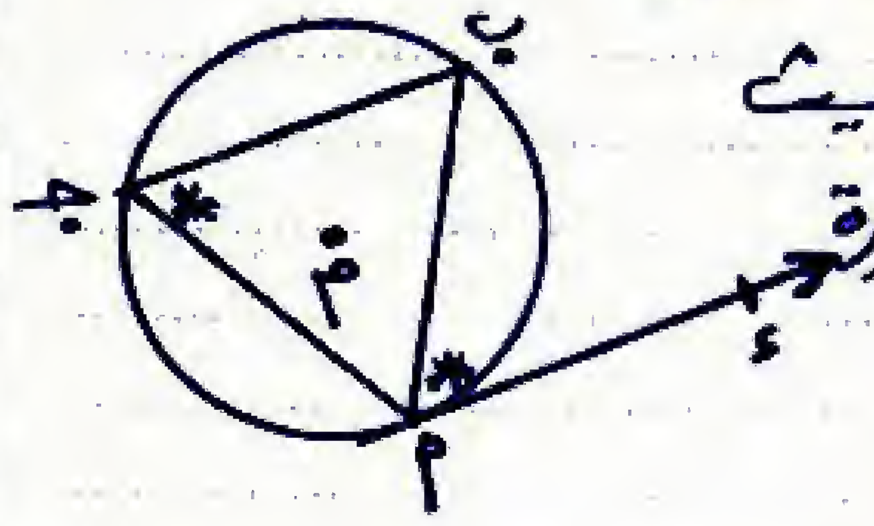
مثال ٢ أب ، أجـ يمسان الدائرة م عند ب ، جـ على الترتيب ، ق(∠ب أ جـ) = ٤٠° ، ق(∠هـ م جـ) = ٧٠° ، إثبت أن ب هـ ينصف ∠ أ ب جـ

[I Like Mathematics]

الدرس السادس

[عكس نظرية الزاوية المماسية]

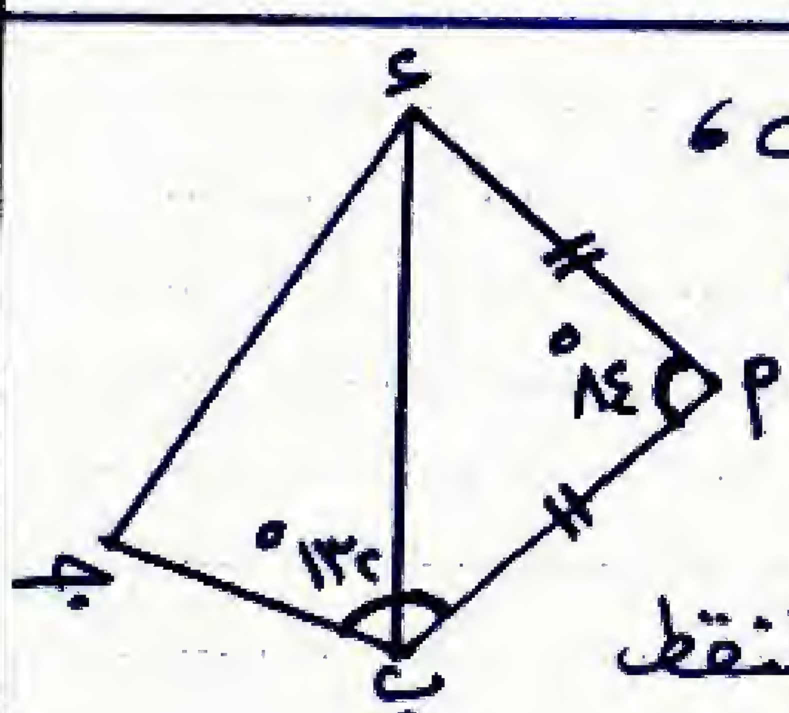
إذا رُسم شعاع من إحدى نقطتي النهاية لوتر في دائرة بحيث كان قياس الزاوية المحصورة بين هذا الشعاع والوتر يساوي قياس الزاوية المحيطية المرسومة على نفس الوتر من الجهة الأخرى فإن هذا الشعاع يكون مماساً للدائرة.



أي أن إذا كان ق(جـ^) = ق(ب أ^ ء)

فإنه نستنتج أن $\overrightarrow{\text{أء}}$ مماس للدائرة م عند أ

مثال ① أ ب جـ ء شكل رباعي ، أ ب = أ ء ، ق(أ^) = ٨٤° ، ق(أ ب^ جـ) = ١٣٢° أثبت أن ب جـ مماسة للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، ء



البرهان في Δ أ ب ء ∵ أ ب = أ ء

∴ ق(أ^) = ٨٤°

∴ ق(أ ب^ ء) = $\frac{١٨٠ - ٨٤}{٢}$ = ٤٨°

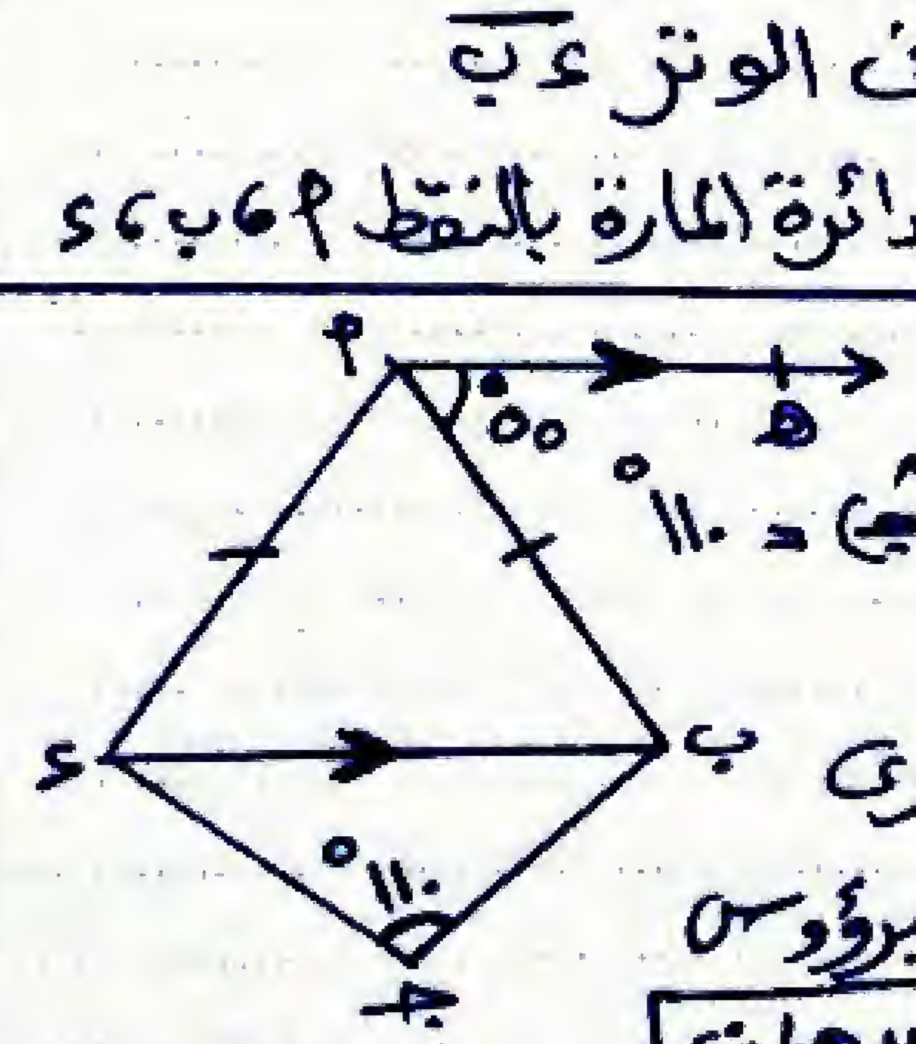
∴ ق(ء ب^ جـ) = ١٣٢° − ٤٨° = ٨٤°

∴ ق(ب أ^ ء) = ق(ء ب^ جـ) = ٨٤°

وهما مشتركان في الوتر $\overline{\text{ءب}}$

∴ ب جـ مماسة للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، ء

مثال ② $\overleftrightarrow{\text{أهـ}}$ // $\overline{\text{ءب}}$ ، ق(ب أ^ هـ) = ٥٥° ، ق(جـ^) = ١١٠° ، أ ب = أ ء أثبت أن



① الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري

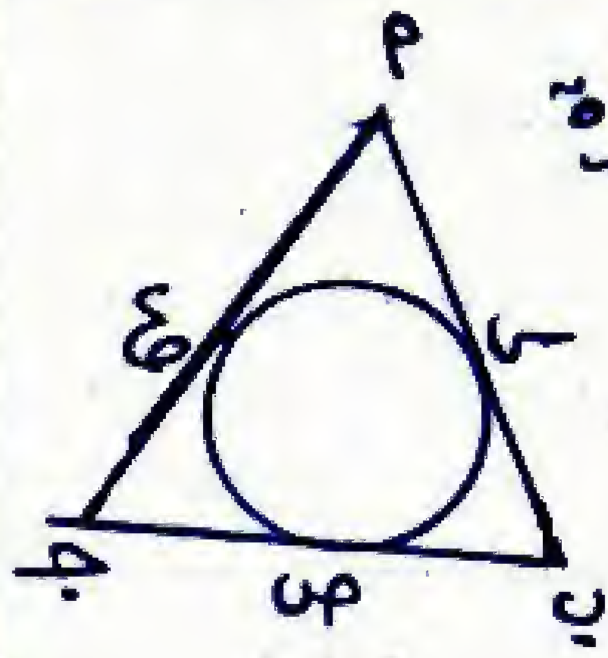
② أ هـ مماس للدائرة المارة برؤوس الشكل أ ب جـ ء

البرهان

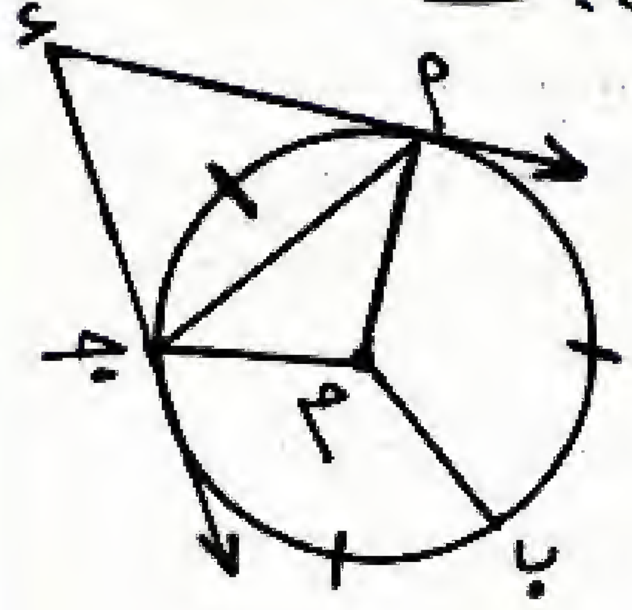
∵ أ ب = أ جـ ∵ $\overleftrightarrow{\text{أهـ}}$ // ب ء

∴ ق(هـ أ^ ب) = ق(أ ب^ ء) = ٥٥° بالتبادل

مثال ③ Δ أ ب جـ يمس الدائرة من الخارج في س ، ص ، ع ، أ س = ٥ سم ، ب ص = ٣ سم ، جـ ع = ٤ سم أحسب محيط Δ أ ب جـ



مثال ④ الدائرة م انقسمت إلى ثلاثة أقواس متساوية في الطول ، $\overrightarrow{\text{ءأ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ءجـ}}$ يمسانها من ء



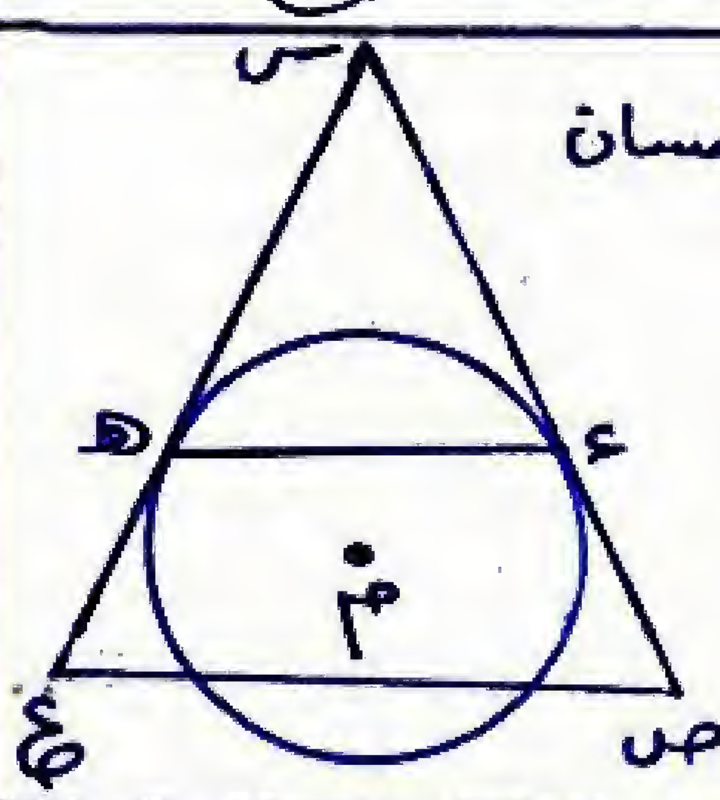
① أوجد ق(أ م^ ب)

② إثبت أن :

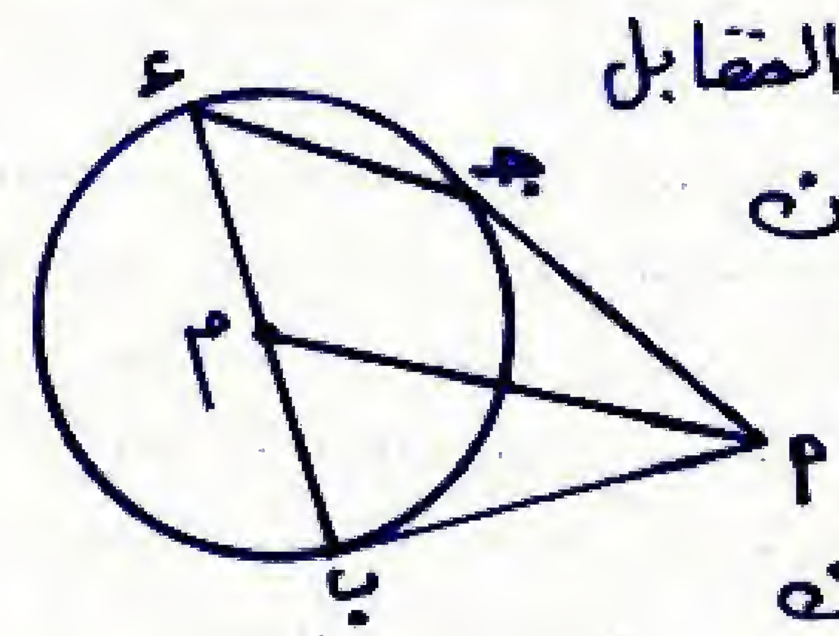
أولاً: الشكل أ م جـ ء رباعي دائري

ثانياً: Δ أ جـ ء متساوي الأضلاع

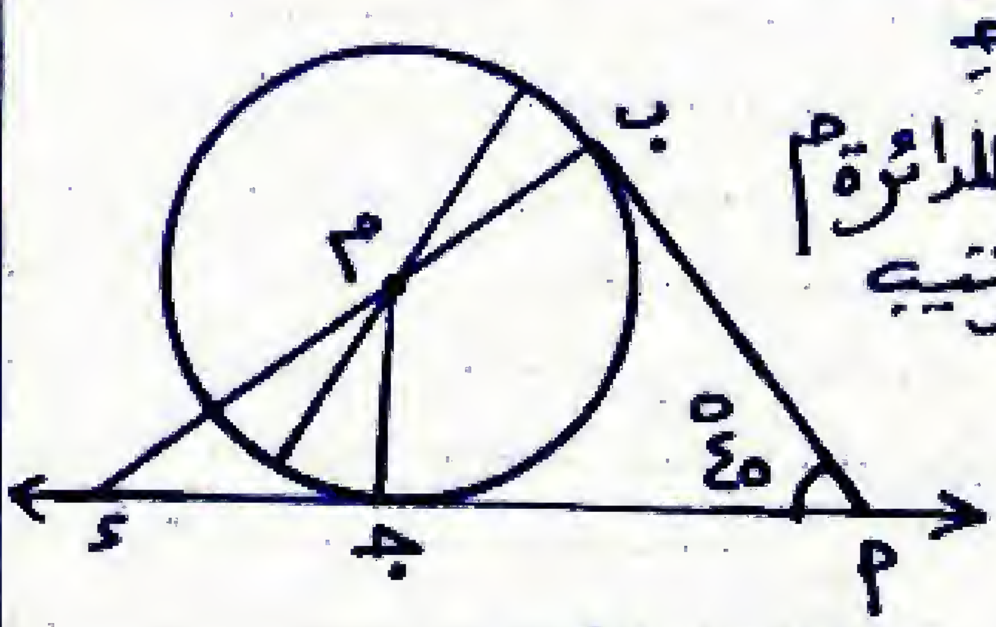
مثال ⑤ $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{س ع}}$ مماسان الدائرة م عند ء ، هـ ، فإذا كان $\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$ فأثبت أن الشكل ء ص ع هـ رباعي دائري



مثال ⑥ في الشكل المقابل $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ قطعتان مماستان للدائرة م ، ب ء قطر في الدائرة إثبت أن $\overline{\text{أم}}$ // $\overline{\text{جـ ء}}$



مثال ⑦ $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب ، جـ على الترتيب ق(أ^) = ٤٥° ، إثبت أن



① الشكل أ ب م جـ رباعي دائري

② أ ء = أ ب + م ب

سبحان الله وبحمده ∴ سبحان الله العظيم

∴ ق(∠أ ب ء) = ق(∠ء أ ب) = ٥٥°

في Δ أ ب ء ق(∠ب أ ء) = ١٨٠° − (٥٥° + ٥٥°)

∴ ق(∠ب أ ء) = ١٨٠° − ١١٠° = ٧٠°

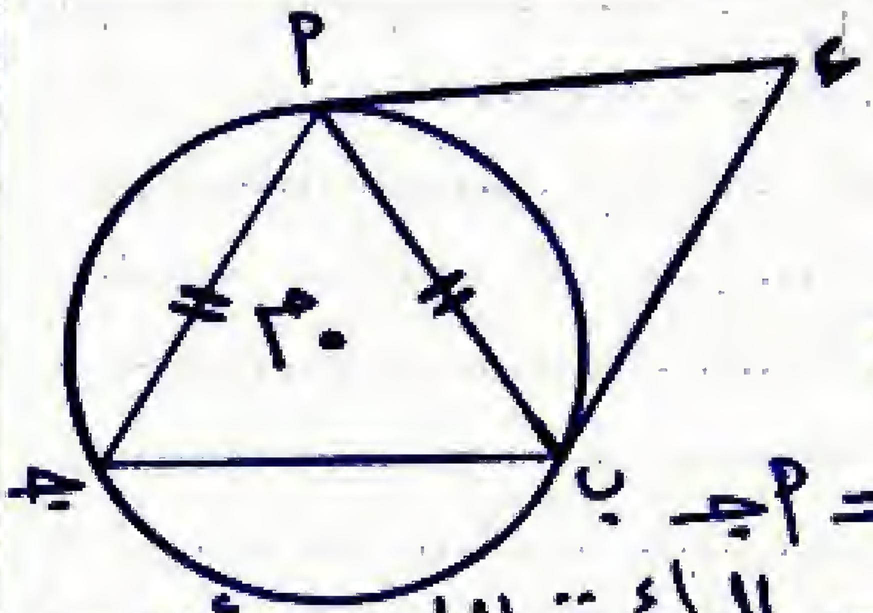
∵ في الشكل الرباعي أ ب جـ ء

∴ ق(∠ب أ ء) + ق(∠جـ) = ٧٠° + ١١٠° = ١٨٠°

وهما متقابلتان متكاملتان

∴ أ ب جـ ء شكل رباعي دائري

مثال ٣



$\overline{ءأ}$ ، $\overline{ءب}$ قطعتان مماستان للدائرة م عند أ ، ب حيث أب = أجـ

إثبت أن $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أ ب ء

البرهان في Δ أ ب جـ ∵ أب = أجـ

∴ ق(∠أ ب جـ) = ق(∠أ جـ ب) ← ①

∵ $\overline{ءأ}$ ، $\overline{ءب}$ قطعتان مماستان مرسومتان من ء ∴ ءأ = ءب

∴ ق(∠ء أ ب) = ق(∠ء ب أ) ← ②

∵ ق(∠ب جـ أ) = ق(∠ء أ ب)

محيطية ومماسية مرسومتان على نفس القوس أب

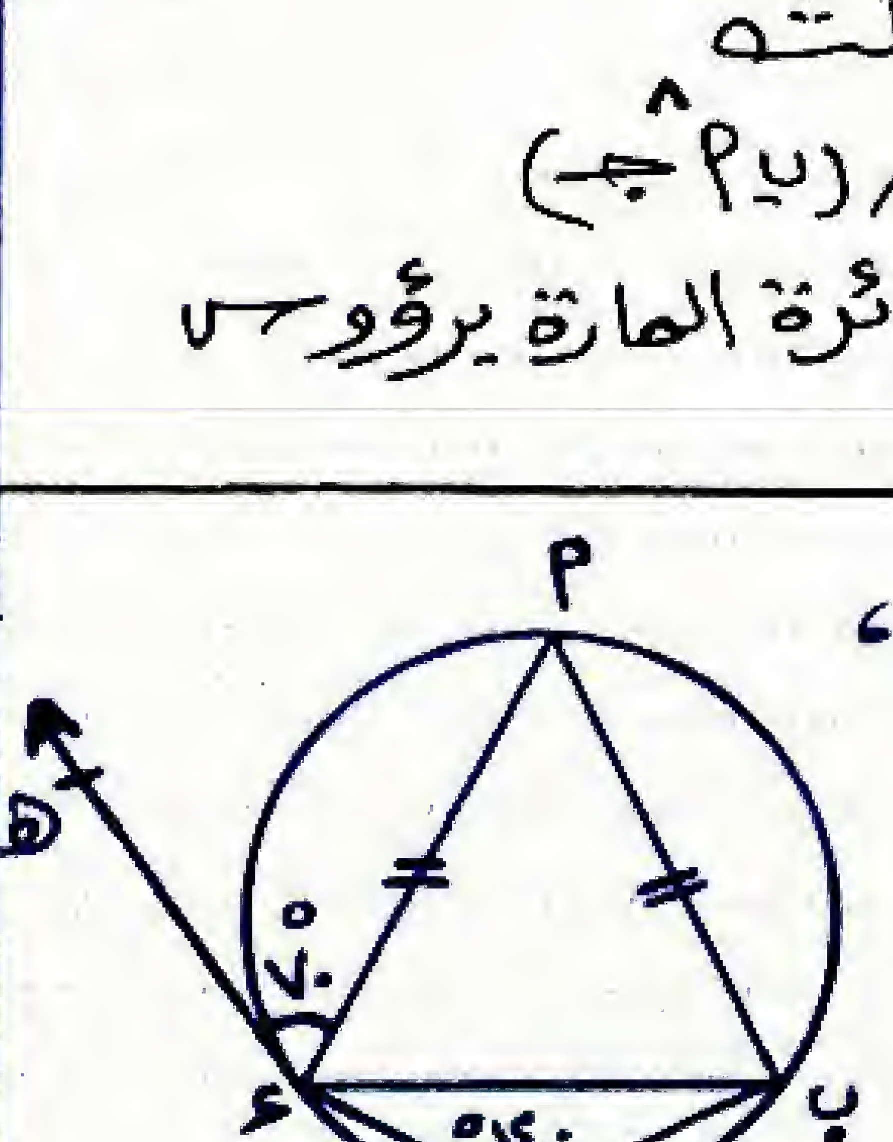
∴ ق(∠ء أ ب) = ق(∠ء ب أ) = ق(∠أ ب جـ)
= ق(∠أ جـ ب)

ومن خواص المثلث

∴ ق(∠ب ء أ) = ق(∠ب أ جـ)

∴ $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أ ب ء

مثال ٤



أب = أء ، ق(∠جـ) = ١٤٠° ، ق(∠أ ء هـ) = ٧٠°

إثبت أن $\overleftrightarrow{ءهـ}$ مماس للدائرة عند ء

البرهان ∵ أ ب جـ ء شكل رباعي دائري

∴ ق(∠أ) = ١٨٠° − ١٤٠° = ٤٠°

∵ أب = أء ∴ Δ أ ب ء متساوي الساقين

∴ ق(∠أ ب ء) = $\frac{١٨٠ - ٤٠}{٢}$ = ٧٠°

∴ ق(∠أ ب ء) = ق(∠أ ء هـ)

مرسومتان على قاعدة واحدة أء

∴ $\overleftrightarrow{ءهـ}$ مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أ ب ء عند ء

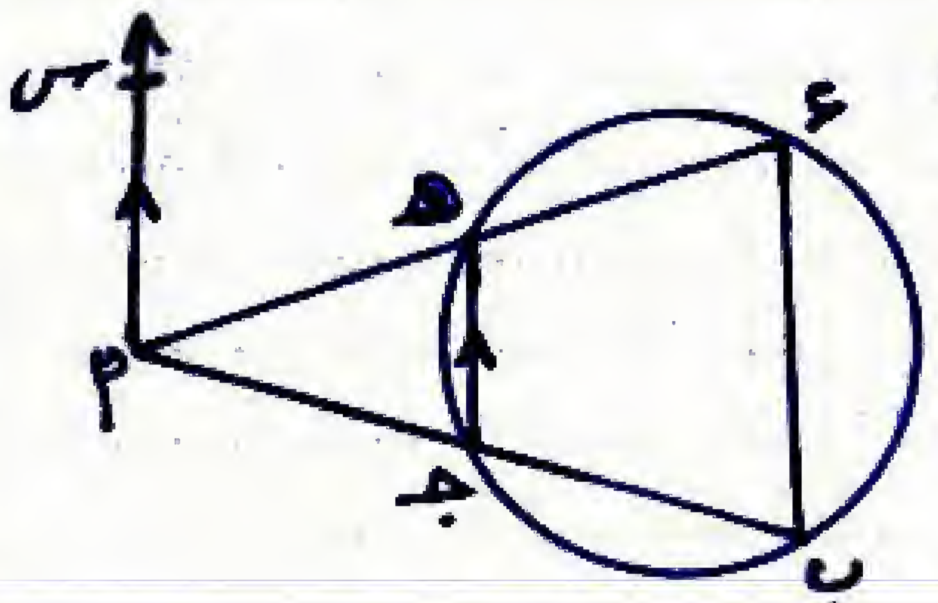
(تمارين)

١ أ ب جـ ء متوازي أضلاع فيه أجـ = بجـ

إثبت أن: $\overleftrightarrow{جـء}$ مماس للدائرة الخارجية للمثلث أ ب جـ

٢ الشكل ب جـ هـ ء رباعي دائري ، $\overleftrightarrow{أس}$ // $\overline{جـهـ}$

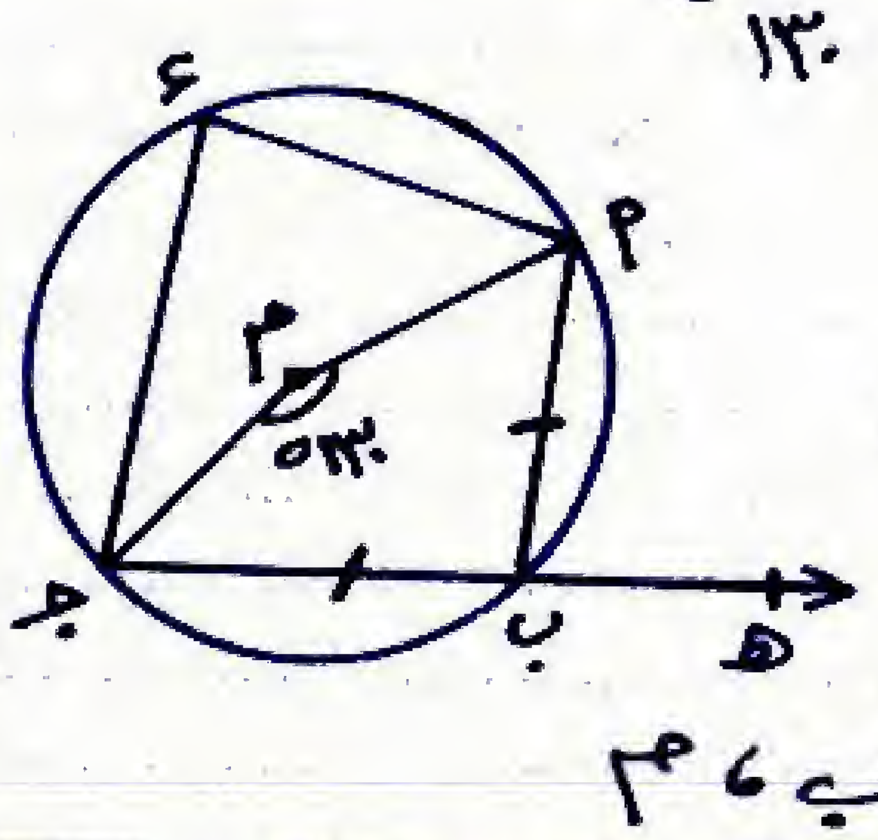
برهن أن $\overleftrightarrow{أس}$ مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أ ب ء



٣ ق(∠أ م جـ) = ١٣٠° ، أب = ب جـ

فأوجد كلاً من: ق(∠ء) ، ق(∠أ ب هـ)

ثم إثبت أن: $\overleftrightarrow{جـهـ}$ يمس الدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، م



٤ أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، $\overrightarrow{أء}$ ينصف ∠ب أ جـ ويقطع $\overline{بجـ}$ في ء والدائرة في هـ إثبت أن: $\overleftrightarrow{بهـ}$ مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، ء

٥ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م حيث أب = ٣٨ ، $\overline{أجـ}$ وتر فيها ، رسم $\overline{بء}$ مماساً للدائرة يقطع $\overrightarrow{أجـ}$ في ء فإذا كان: ب ء = ٣٦

① إثبت أن: $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة المارة برؤوس Δ جـ ب ء

② أوجد: طول $\overline{بجـ}$